

A halmazok feladatainak eredményei

2. Számhalmazok

1. a) 48 b) 0 c) 70
3. 8
6. 0; 2; 12; 62; 312
7. 2; 3; 9; 30; 273; 8193

3. Műveletek racionális számokkal

1. a) $\frac{13}{10}$ b) 2 c) $\frac{5}{3}$
2. a) az első: $\frac{4}{3}$, a második: 1,428. A második nagyobb b) az első: 1,3125, a második: 1,2. Az első nagyobb.
3. 175 m
4. A megtakarított pénz: 1 400 000 Ft. A lekötött pénz: 840 000 Ft.
5. a) 332 liter b) 61752 liter
6. a) 160 kg b) $\approx 11,8\%$
7. 250; 350; 490; 686; 960,4
8. 169 cm
9. 144 oldalas
10. 100 fő

4. Részhalmaz fogalma

1. $K = \{21; 22; 23; \dots; 44\}$, $L = \{21; 32; 43\}$, $L \subset K$
2. a) $B \subset A$, $C \subset A$ b) $R \subset T$, $R \subset D$ c) $N \subset G \subset P \subset T$ d) $C \subset M$, $L \subset M$
3. 24
4. Kételemű részhalmazok: $\{13;18\}$ $\{13;23\}$ $\{13;28\}$ $\{13;33\}$ $\{18;23\}$ $\{18;28\}$ $\{18;33\}$ $\{23;28\}$ $\{23;33\}$ $\{28;33\}$ Ez alapján már könnyen megadhatók a háromelemű részhalmazok.
5. $[-1;3] \subset [-2;3]$, $[0,6;2,3] \subset [0;2008]$

5. Műveletek halmazok között

2. a) $\{1;3;6\}$ b) \emptyset c) $\{1; 2; 3; 6; 7\}$ d) $\{1; 2; 3; 6; 7\}$ e) $\{4;8\}$ f) $\{5; 9; 10\}$ g) $\{4;8\}$
h) \emptyset i) \emptyset j) \emptyset k) $\{2, 5; 7; 9; 10\}$ l) $\{2, 4, 5; 7; 8; 9; 10\}$ m) $\{1;3;6\}$
3. Az a) és d) egyenlő, mindkettő a $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 9; 10\}$ halmaz, valamint a b) és c) egyenlő, mindkettő a $\{0; 3; 4; 7\}$ halmaz.
4. Az a) és c) egyenlő, mindkettő a $\{12; 13\}$ halmaz, valamint a b) és d) egyenlő mindkettő a $\{11; 12; 13; 14; 16; 17; 18\}$ halmaz.
5. a) $A = \{2; 3; 4; 10\}$, $B = \{4; 5; 6; 7; 10\}$ b) $A = \{1; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$, $B = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
6. $A = \{2; 3; 4; 5; 7\}$, $B = \{1; 2; 3; 5; 6; 7; 8; 9\}$, $C = \{4; 5; 6; 7\}$
7. $A \times B = \{(1;3), (1;4), (1;5), (2;3), (2;4), (2;5), (3;3), (3;4), (3;5), (4;3), (4;4), (4;5)\}$

6. Logikai szita, egyszerűbb összeszámlálások

1. Mindkettő szakkörre 2-en járnak.
2. Az osztály létszáma: 30. Közepes dolgozatot 9-en írtak.
3. A bevétel 5840 Ft
4. angol: 24, német: 18, spanyol: 9
5. Mindhárom szakkörre 2-en járnak.
6. Legalább az egyikkel 571, pontosan az egyikkel 500, egyikkel sem 429 darab szám osztható.
7. a) 233 b) 468 c) 734 d) 266
8. 7776 db ötjegyű számot kaphatunk, 3125 db számban nem szerepel az 1-es, 4651 db számban szerepel az 5-ös.

9. 4320 db hatjegyű, különböző számjegyekből álló szám képezhető a megadott számjegyekből, ebből 1320 osztható öttel.
 10. 666 óra 40 perc
 11. a) 5416 b) 920

Az algebra, számelmélet feladatainak eredményei

1. Betűs kifejezések a matematikában

5. a) 4 b) -7 c) -3 d) 2,5 e) $-\frac{17}{5}$ f) $\frac{38}{7}$
 6. a) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3}{5} \right\}$ b) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ c) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{7}{4} \right\}$ d) $\mathbb{R} \setminus \{0; -5\}$ e) $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2}; -4 \right\}$ f) $\mathbb{R} \setminus \left\{ 3; -\frac{3}{2} \right\}$ g) $\mathbb{R} \setminus \left\{ -2; 2; \frac{2}{5} \right\}$

2. Pozitív egész kitevőjű hatvány

2. a) $A = 324, B = -864, C = 216$ b) $A = 5, B = -9, C = 1$ c) $A = 49, B = 54, C = 6561$
 d) $A = 21, B = 22050, C = 1024$
 3. a) $\frac{15}{8}$ b) $\frac{1}{64}$ c) 512 d) 1250 e) 196 f) 0,03
 4. a) a^{10} b) b^{24} c) c^2 d) b^2 e) bc f) $\frac{y}{x}$
 5. $\approx 177\,156$ Ft

3. Egész kitevőjű hatvány

1. a) $\frac{1}{64}$ b) 27 c) 100 d) 1000 e) $\frac{625}{16}$ f) $-\frac{7}{4}$ g) 32 h) 45 i) 98
 2. a) a^2 b) $\frac{1}{4a^7}$ c) $y^{10}x^{-9}$ d) 1
 3. a) egyenlők b) az első nagyobb c) a második nagyobb d) az első nagyobb

4. Számok normálalakja

4. $\approx 9,46 \cdot 10^{12}$ km
 5. $4,66 \cdot 10^{-26}$
 6. $3,27 \cdot 10^5$
 7. $3,58 \cdot 10^{22}$ N
 8. $\approx 96,6\%$ -kal
 9. 1 cm

5. Algebrai egész kifejezések

2. a) $9x - 4$ b) $-4x^4 - 3x^2 + 2x - 3$ c) $17a^2b^2 + ab^2 - ab - 11$ d) $2x^3 - x^2 + xy - 5x^2y + 14xy^2 - 3x + 1$
 e) $abc - a^3 + 4a^2bc - ab^2c - 5abc^2 + 72$ f) $\frac{37}{21}xy - \frac{251}{8}x - \frac{7}{4}y + \frac{4}{3}$
 3. a) $5x^2 - 12x + \frac{9}{2}$ b) $7x^2 - \frac{8}{5}x + 8$ c) $-\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{7}{6}$ d) $\frac{9}{4}x^2 - \frac{23}{5}x + \frac{4}{3}$ e) $-\frac{5}{12}x^2 - \frac{11}{10}x - \frac{5}{6}$
 f) $\frac{23}{6}x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{17}{3}$ g) $\frac{89}{12}x^2 - \frac{111}{5}x + \frac{38}{3}$
 4. a) $12x^3 - 16x$ b) $6x^2y - 4xy^2 + 8x^2y^2 - 2xy$ c) $12y^2 - 5y - 2$ d) $20a^2 + 18a + 4$
 e) $-15b^2 + 7b + 2$ f) $5x^2y^2 - 7xy - 6$ g) $2x^4 - 7x^2 - 15$ h) $8x^4y^2 + 2x^2ya - a^2$
 i) $2x^3 - 11x^2 + 17x - 5$ j) $3a^6 - 2a^4b + a^3b^2 - 6a^3b + 4ab^2 - 2b^3$ k) $x^6 - 3x^5 + 2x^4 - x^2 + 3x - 2$
 5. a) $3x^2 + 4x + 10$ b) $2x^2y - 5xy^2 - 8xy + 20y$ c) $5a^2 + 3a - 11$ d) $5a^2 - 17a + 3$
 e) $-8b^2 - 219b - 256$ f) $y^3 - y^2 - 5y + 6$ g) $-6x^3 - x^2 + 31x - 10$ h) $2x^2 - 2$

6. Nevezetes szorzatok

1. a) $x^2 - 20x + 100$ b) $b^2 + 14b + 49$ c) $16x^2 - 12x + \frac{9}{4}$ d) $9y^2 + \frac{15}{4}y + \frac{25}{64}$ e) $\frac{1}{9}a^2 + \frac{1}{2}ac + \frac{9c^2}{16}$
- f) $\frac{4}{25}y^2 - 8yz + 100z^2$ g) $a^6 - 8a^3x^4 + 16x^8$ h) $\frac{c^4}{36} + \frac{4}{7}c^4b^5 + \frac{144b^{10}}{49}$ i) $\frac{9}{16}x^4y^2 - x^3y^4 + \frac{4}{9}x^2y^6$
- j) $\frac{25}{49}a^8b^4 + 4a^7b^3 + \frac{196}{25}a^6b^2$ k) $\frac{49}{9}b^4c^2 - 14b^6c^4 + 9b^8c^6$ l) $\frac{16}{25}a^{2n}b^{2n-2} - 2a^{2n-2}b^{2n} + \frac{25}{16}a^{2n-4}b^{2n+2}$
2. a) $a^2 - 144$ b) $a^2 - 144$ c) $9b^2 - 16c^2$ d) $\frac{x^2}{25} - \frac{4y^2}{9}$ e) $\frac{16a^2}{9} - \frac{4b^2}{25}$ f) $25b^4 - c^6$ g) $\frac{x^8}{16} - \frac{25y^{10}}{9}$
3. a) $3a^2 + 9$ b) $-2x^2 + 28x + 21$ c) $-18a + 33$ d) $3a^8 + 6a^4b^2 + 9b^4 - 2a^4 + 2b^2$
4. 2 a négyes maradéka
5. 0 az ötös maradéka
8. a) $8x^3 - 36x^2y + 54xy^2 - 27y^3$ b) $a^3 + 12a^2b + 48ab^2 + 64b^3$ c) $\frac{a^3}{8} - \frac{a^2c}{2} + \frac{2ac^2}{3} - \frac{8c^3}{27}$
- d) $b^6 - 6b^4c^3 + 12b^2c^6 - 8c^9$ e) $27y^{12} + 54y^8z^5 + 36y^4z^{10} + 8z^{15}$
9. a) $a^3 + 8$ b) $x^3 - 27$ c) $y^6 - 64$ d) $a^9 + 1$
10. a) $a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 2ac + 4bc$ b) $4x^2 + 9y^2 + 25 + 12xy + 20x + 30y$
- c) $a^2 + 16b^2 + c^2 - 8ab + 2ac - 8bc$ d) $x^2 + y^2 + 4z^2 - 2xy - 4xz + 4yz$
11. a) $x^3 + 6x^2y + 18xy^2 - 6y^3$ b) $83a^3 + 90a^2b - 18ab^2 + 20b^3$

7. Szorzattá alakítás

1. a) $3a(x-3)$ b) $7a^2(2a-3)$ c) $6x^4(3x^2-4)$ d) $ab^2(b+a^3)$ e) $5a^2b^2(5a^2b-3-7ab^2)$
2. a) $(a-b)(4x+3y)$ b) $(x-a)(x-4)$ c) $(7a-5c)(3a-4b)$ d) $(2a-y)(12x-5b)$ e) $(y+1)(y^2+1)y$
3. a) $(a-6)^2$ b) $9(4x+y)^2$ c) $(y^2-8)^2$ d) $\left(\frac{3}{2}b^3-2c^4\right)^2$ e) $(2a-9)(2a+9)$ f) $(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$
- g) $\left(4a^3 + \frac{b}{3}\right)\left(4a^3 - \frac{b}{3}\right)$ h) $(2x-3-y)(2x-3+y)$ i) $(a-4)(a+8)$ j) $\left(\frac{7}{11}b + \frac{53}{11}\right)\left(\frac{7}{11}b - \frac{123}{11}\right)$ k) $(k-7-y)(k-3+y)$
4. a) $(x-2)(x-6)$ b) $(x+2)(x+8)$ c) $(x-17)(x-7)$ d) $5(x-5)(x-1)$ e) $-3(x-3)(x-1)$
- f) $-2(x+6)(x+4)$
5. a) $(x+y)(x-y-1)$ b) $14ax(1-x)^2$ c) $(x-2y)(x-2y-3)$ d) $(4-2x+5y)(4+2x-5y)$
- e) $(a-6)(a-2)(a+2)$ f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$
6. a) $\{0; 12\}$ b) $\left\{0; \frac{2}{3}\right\}$ c) $\{10\}$ d) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$ e) $\{1; 10\}$ f) $\{-13; -1\}$ g) $\left\{0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right\}$ h) $\{1\}$
7. a) $(x+y)^3$ b) $(a-b)^3$ c) $(x+1)^3$ d) $(c-2)^3$ e) $(3x+y)^3$
8. a) $(x-2)(x^2+2x+4)$ b) $(y+3)(y^2-3y+9)$ c) $(a-1)(a^2+a+1)$ d) $(5c+1)(25c^2-5c+1)$
- e) $(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$ f) $(4x+5y)(16x^2-20xy+25y^2)$

8. Algebrai törtek

1. a) $\frac{3(x+2)}{x}$ $x \neq 2; 0$ b) $\frac{x-3}{x(x+3)}$ $x \neq 3; -3; 0$ c) $\frac{x+5}{5x}$ $x \neq 13; 0$ d) $\frac{x+3}{(x-5)x}$ $x \neq 5; 0$
- e) $\frac{x+3}{x-4}$ $x \neq 8; 4$ f) $\frac{2(a+b)}{3(a-b)(a^2+b^2)}$ $|a| \neq |b|$ g) $\frac{1}{x+1}$ $|x| \neq 1$ h) $\frac{a-b}{2(a^2-ab+b^2)}$ $a \neq -b$
2. a) $\frac{4x^2+42x+18}{21x^3}$ $x \neq 0$ b) $\frac{18}{(x+3)^2}$ $x \neq -3$ c) $\frac{y+1}{5(y-4)^2}$ $y \neq 4$ d) $\frac{-7y^2+2y-1}{y^2(y+1)(y-1)}$ $y \neq 1; 0; -1$
- e) $-\frac{1}{2}$ $a \neq 1; -1$ f) $\frac{17y+17}{(y+3)3y}$ $y \neq 0; -3$ g) $\frac{-14a-6}{(a+1)^2(a-1)^2}$ $a \neq 1; -1$ h) $\frac{4a^2+a+7}{a^3-8}$ $a \neq 2$

3. a) $\frac{x}{x+1} \quad x \neq 1; 0; -1$ b) $\frac{x+2}{2(x-2)} \quad x \neq 2; 4$ c) $\frac{20(x-10)}{x} \quad x \neq 10; -10; 0$ d) $2a+6 \quad a \neq 3; -2$
 e) $\frac{4x+10}{x-6} \quad x \neq \frac{5}{2}; 6$ f) $\frac{1}{a+b} \quad |a| \neq |b| \quad a \neq 0, b \neq 0$
4. a) $x+4 \quad x \neq -\frac{1}{5}; 4$ b) $a \quad a \neq 1; -1, -3$ c) $1 \quad a \neq -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}; \frac{1}{12}$

9. Számelmélet

1. a) i b) i c) i d) i e) n
 2. a) C b) C c) B d) B e) A f) C g) A
 3. A szám végződése: 4.
 4. Nem, mert mindig osztható 17-tel, ha $17|20x - 7y$
 5. A négyzetszámok végződése: 0, 1, 4, 4, 6, 9. Nem, mert 7-re végződik.
 6. A szorzat: 0.
 7. Mind az a) mind a b) esetben egy.
 8. 192
 9. 12
 10. Igen pl. 48.
 11. Egy tízes számrendszerbeli szám akkor és csak akkor osztható nyolccal, ha az utolsó három számjegyéből képezett szám osztható nyolccal.
 12. a) $\frac{21}{22}$ b) $\frac{250}{33}$
 13. pl. 6, 10, 15
 14. Legalább 385 csempére van szükség.
 15. a) $\frac{97}{6750}$ b) $\frac{833}{2700}$
 16. 1 és 392, ill. 8 és 49
 17. a) Ha $y = 0$, akkor $x = 0; 3; 6; 9$, ha $y = 5$ akkor $x = 1; 4; 7$.
 b) Ha $x = 0$, akkor $y = 1; 4; 7$, ha $x = 4$, akkor $y = 0; 3; 6; 9$, ha $x = 8$, akkor $y = 2; 5; 8$.
 c) Ha $y = 0$, akkor $x = 6$, ha $y = 5$, akkor $x = 1$.
 d) Ha $y = 4$, akkor $x = 5$.
 18. Háromszor.
 19. A négyzetszámok.

10. Számrendszerek

1. a) 916 b) 217 c) 23635 d) 22512
 2. a) 111000_2 b) 12221_3 c) 31031_6 d) 116311_7
 3. a) $(12)(34)(54)(10)_{100}$ b) 2303_4 c) 185_9
 4. a) 11010_3 b) 44130_5
 5. $x = 3; 7$
 6. $x = 0; 3$
 7. a) $x = 10$ b) x lehet bármely 2-nél nagyobb pozitív egész szám.

A függvények feladatainak eredményei

1. A függvény fogalma, jelölések, elnevezések

1. a) Az f és a h függvény. b) Az f kölcsönösen egyértelmű.
 $D_f = \{0; 1; 2; 3\}$, $R_f = \{-5; 2; 0; 2; \pi\}$, $f(2) = 2$
 $D_h = \{0; 1; 2; 3\}$, $R_h = \{-5; 2; 0; \pi\}$, $h(2) = 0$

2. a) függvény b) nem függvény c) függvény d) nem függvény e) függvény f) nem függvény

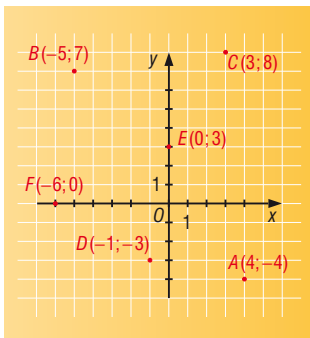
6. a) $f(2) = -1$, $f(1) = -\frac{3}{2}$, $f(-2) = -7$, $f\left(-\frac{4}{3}\right) = -6$, $g(2) = -\frac{9}{5}$, $g(1) = 2$, $g(-2) = -\frac{11}{5}$, $g\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{69}{25}$

b) 15 c) -3,5 d) $-\frac{53}{3}$

7.a) egyenlők b) egyenlők c) egyenlők d) nem egyenlők

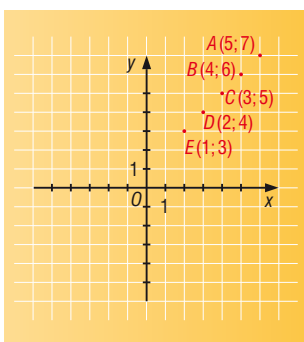
2.A koordináta rendszer I.

1.

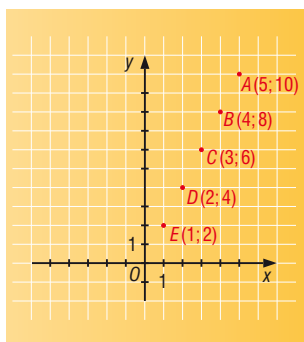


2. A háromszög területe: 48,5 cm²

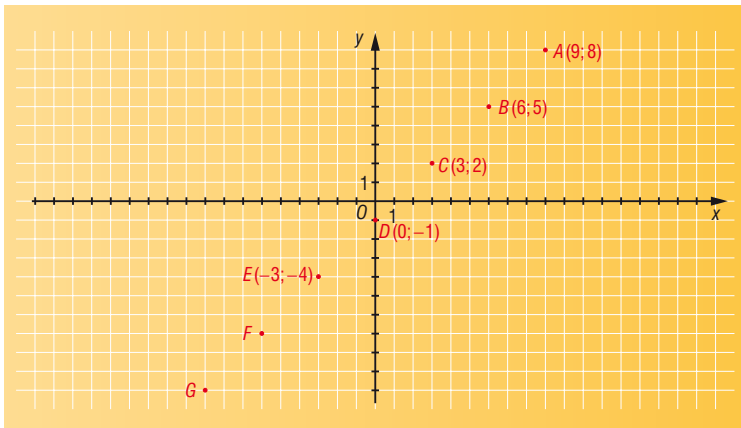
3. a)



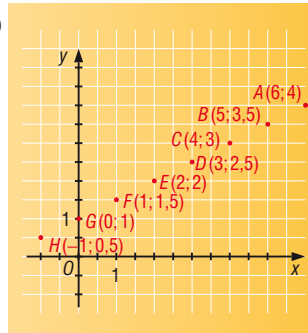
b)



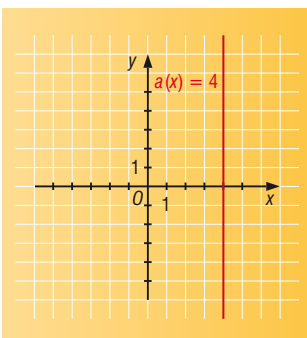
c)



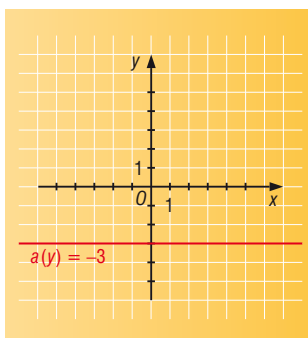
d)



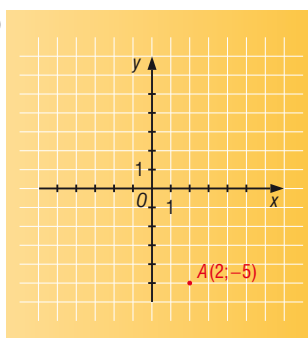
4. a)



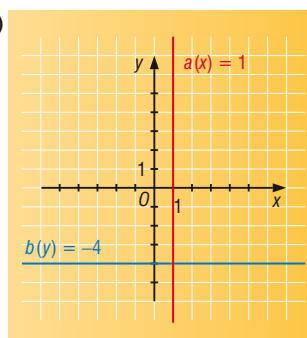
b)

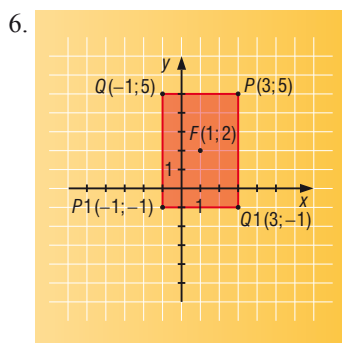
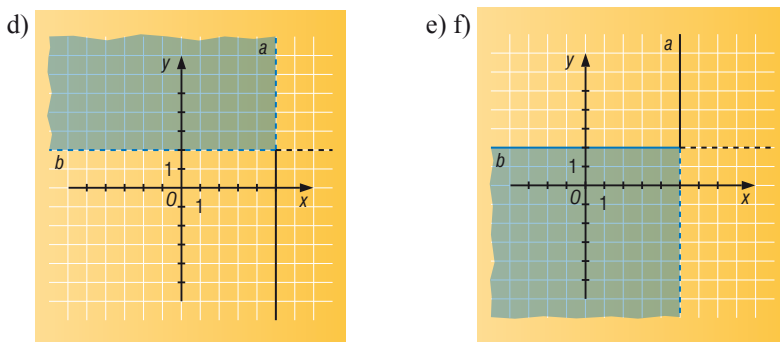
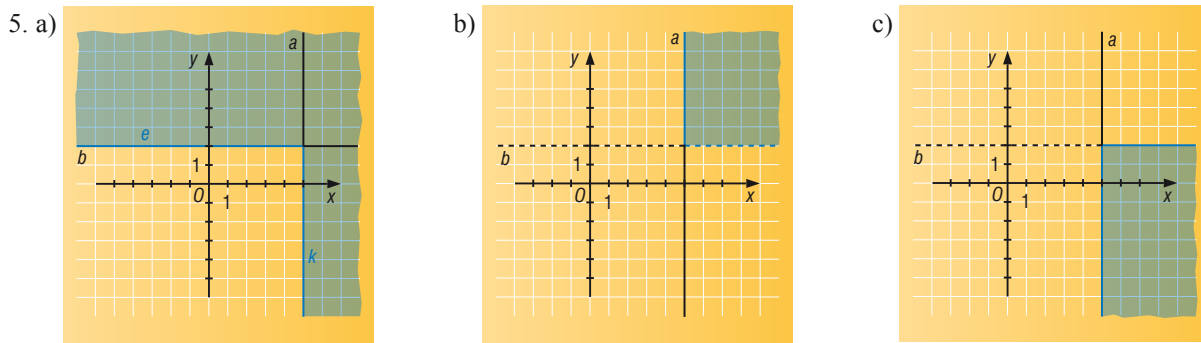
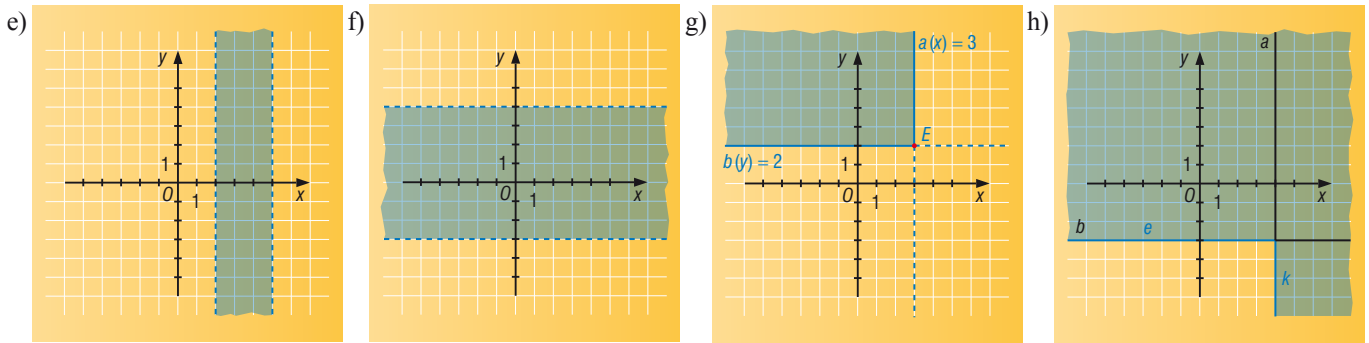


c)



d)



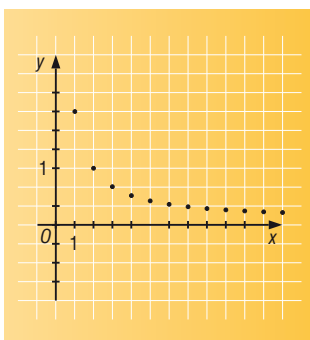


A négyszög téglalap, a területe 24 (t.e.).

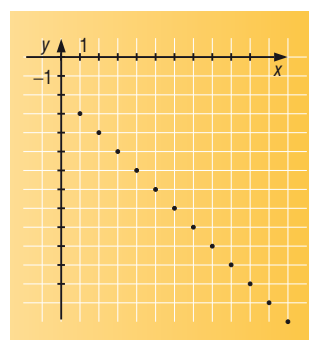
7. 66 helyre juthat el a bolha.
 8. 221 helyre juthat el a bolha.

3. Függvények szemléltetése

1. a) $f(x) = \frac{6}{x}$;



b) $g(x) = -x - 2$.

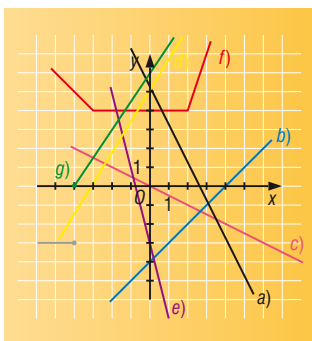


Mindkét függvény grafikonja 12 izolált pontból áll, a grafikon megrajzolásához ezek a pontok nem köthetők össze.

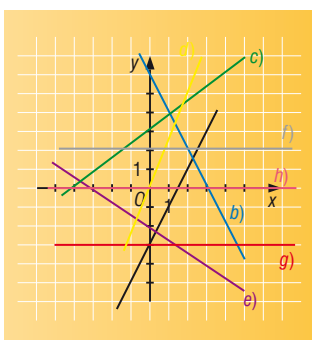
2. a) $D_f = [-4; 8[$, $R_f = [-3; 8]$, zérushelyek: $x_1 = 0, x_2 = 6$; b) $f(1) = 5$; c) $x_1 = -4, x_2 = 1, x_3 = 3$ d) $] -4; 1[\cup] 3; 8[$.

4. Lineáris függvények, egyenes arányosság

1.

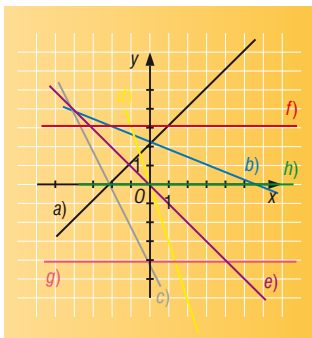


2.



a) $f(x) = 2x - 3$; b) $g(x) = -2x + 6$;
 c) $h(x) = \frac{3}{4}x + 3$; d) $i(x) = \frac{3}{2}x$;
 e) $j(x) = -\frac{2}{3}x - 2$; f) $k(x) = 2$;
 g) $l(x) = -3$; h) $m(x) = 0$.

3.



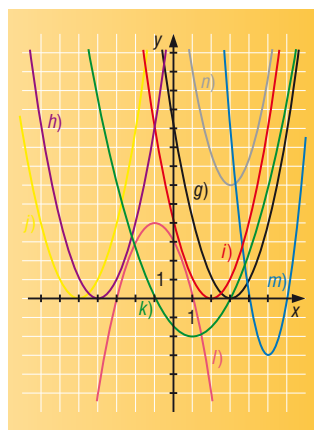
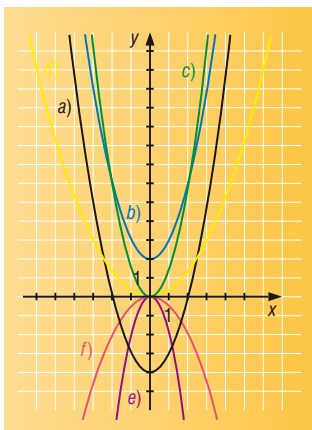
a) $f(x) = x + 2$; b) $g(x) = -\frac{2}{5}x + \frac{11}{5}$;
 c) $h(x) = -2x - 4$; d) $i(x) = -3x$;
 e) $j(x) = -x$; f) $k(x) = 3$;
 g) $l(x) = -4$; h) $m(x) = 0$.

4. 2 kg liszt, $6\frac{2}{3}$ dkg cukor, $5\frac{1}{3}$ kg paradicsom, $3\frac{1}{3}$ dkg oregano, 20 dkg élesztő, 1 kg sajt szükséges.

5. A palackban levő gáz nyomása 15%-kal nő.

5. Másodfokú függvény

1.



Hozzárendelési szabály	Zérushely	Szélsőérték	Monotonitás	Paritás	Grafikon
	$x_1 = -2$ $x_2 = 2$	Minimum helye: $x = 0$ Minimum értéke: $y = -4$		páros	Pozitív irányba nyíló parabola
b) $x \mapsto x^2 + 2$	Nincs	Minimum helye: $x = 0$ Minimum értéke: $y = 2$] $-\infty; 0$]-on szig. mon. csökkenő, a $[0; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	páros	Pozitív irányba nyíló parabola
a) $x \mapsto x^2 - 4$		Minimum helye: $x = 0$ Minimum értéke: $y = 0$		páros	Pozitív irányba nyíló parabola
c) $x \mapsto \frac{3}{2}x^2$	$x = 0$	Minimum helye: $x = 0$ Minimum értéke: $y = 0$		páros	Pozitív irányba nyíló parabola
d) $x \mapsto \frac{1}{3}x^2$	$x = 0$	Minimum helye: $x = 0$ Minimum értéke: $y = 0$		páros	Pozitív irányba nyíló parabola
e) $x \mapsto -2x^2$	$x = 0$	Maximum helye: $x = 0$ Maximum értéke: $y = 0$] $-\infty; 0$]-on szig. mon. növekvő, a $[0; \infty[$ -on szig.mon. csökkenő	páros	Negatív irányba nyíló parabola
f) $x \mapsto -\frac{1}{2}x^2$	$x = 0$	Maximum helye: $x = 0$ Maximum értéke: $y = 0$		páros	Negatív irányba nyíló parabola
g) $x \mapsto (x-3)^2$	$x = 3$	Minimum helye: $x = 3$ Minimum értéke: $y = 0$] $-\infty; 3$]-on szig. mon. csökkenő, a $[3; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
h) $x \mapsto (x+4)^2$	$x = -4$	Minimum helye: $x = -4$ Minimum értéke: $y = 0$] $-\infty; -4$]-on szig. mon. csökkenő, a $[-4; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
i) $x \mapsto (x-2)^2$	$x = 2$	Minimum helye: $x = 2$ Minimum értéke: $y = 0$] $-\infty; 2$]-on szig. mon. csökkenő, a $[2; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
j) $x \mapsto (x+5)^2$	$x = -5$	Minimum helye: $x = -5$ Minimum értéke: $y = 0$] $-\infty; -5$]-on szig. mon. csökkenő, a $[-5; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
k) $x \mapsto \frac{1}{2}(x-1)^2 - 2$	$x_1 = 3$ $x_2 = -1$	Minimum helye: $x = 1$ Minimum értéke: $y = -2$] $-\infty; 1$]-on szig. mon. csökkenő, a $[1; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
l) $x \mapsto -(x+1)^2 + 4$	$x_1 = 1$ $x_2 = -3$	Maximum helye: $x = -1$ Maximum értéke: $y = 4$] $-\infty; -1$]-on szig. mon. növekvő, a $[-1; \infty[$ -on szig.mon. csökkenő	Nem páros, nem páratlan	Negatív irányba nyíló parabola
m) $x \mapsto 3(x-5)^2 - 3$	$x_1 = 4$ $x_2 = 6$	Minimum helye: $x = 5$ Minimum értéke: $y = -3$] $-\infty; 5$]-on szig. mon. csökkenő, a $[5; \infty[$ -on szig.mon. növekvő	Nem páros, nem páratlan	Pozitív irányba nyíló parabola
n) $x \mapsto -\frac{3}{2}(x-3)^2 + 6$	$x_1 = 1$ $x_2 = 5$	Maximum helye: $x = 3$ Maximum értéke: $y = 6$] $-\infty; 3$]-on szig. mon. növekvő, a $[3; \infty[$ -on szig.mon. csökkenő	Nem páros, nem páratlan	Negatív irányba nyíló parabola

6. A négyzetgyök fogalma, négyzetgyökfüggvény

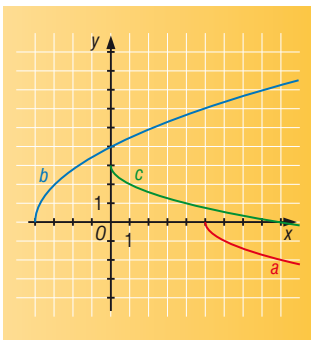
2. a) $x \geq 3,5$; $x \geq -\frac{8}{3}$; $\frac{7}{4} \geq x$; $-\frac{3}{5} \geq x$

b) $x > 0$; $x > 4$; $3 > x$; $-\frac{2}{3} > x$

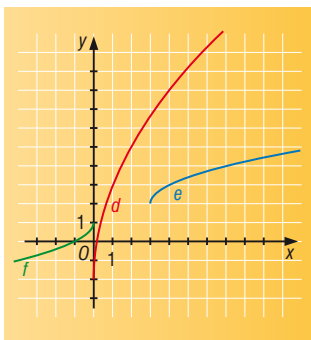
c) $x \geq 2,5$; $4 \geq x \geq -2$; $x \geq -1,5$

d) $x = 2$; \emptyset ; $x > \frac{5}{11}$

3. a) b) c)



d) e) f)



A jellemzés a grafikonok alapján már nem nehéz.

4. a) $l(T) = \frac{g}{2\pi} T^2, T \in \mathbb{R}_0^+$

b) T : 0,628 s, 4,44 s, 1,99 s; l : 1,6 m, 14,33 m, 39,8 m

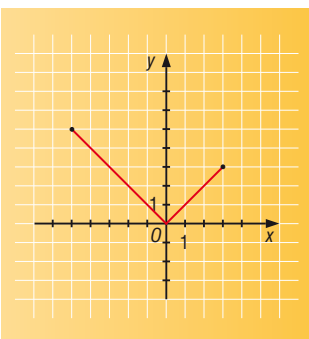
c) négy-, ill. kilencszeresére

d) 75%-kal

e) 125%-kal

7. Az abszolútérték-függvény

1. a)

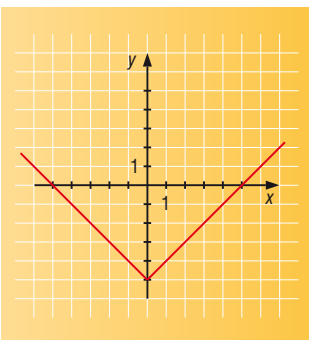


A $[-5; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenő a függvény, a $[0; 3]$ -on pedig szigorúan monoton növekvő.

Zérushelye: $x_0 = 0$.

Szavakban: A mínusz öt, három zárt intervallum minden eleméhez rendeljük hozzá az abszolút értékét!

b)

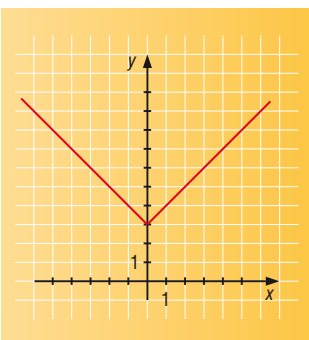


A $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenő a függvény, a $[0; \infty[$ -on pedig szigorúan monoton növekvő.

Zérushelye: $x_1 = -5$ és $x_2 = 5$.

Szavakban: Minden valós számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékénél öttel kisebb számot!

c)

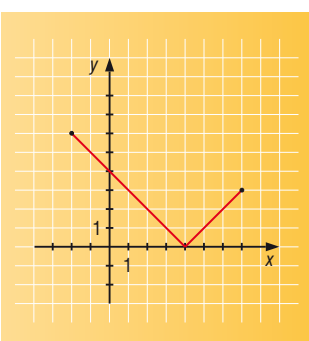


A $]-\infty; 0]$ -on szigorúan monoton csökkenő a függvény, a $[0; \infty[$ -on pedig szigorúan monoton növekvő.

Zérushelye: nincs.

Szavakban: Minden valós számhoz rendeljük hozzá az abszolút értékénél hárommal nagyobb számot!

d)

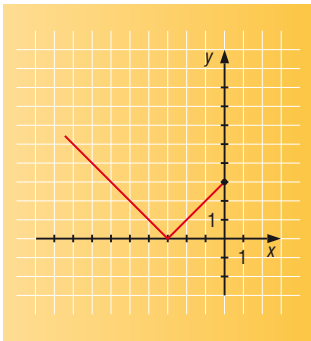


A $]-2; 4]$ -on szigorúan monoton csökkenő a függvény, a $[4; 7[$ -on pedig szigorúan monoton növekvő.

Zérushelye: $x_0 = 4$.

Szavakban: A mínusz kettő, hét nyílt intervallum elemeihez rendeljük hozzá a náluk néggyel kisebb számok abszolút értékét!

e)

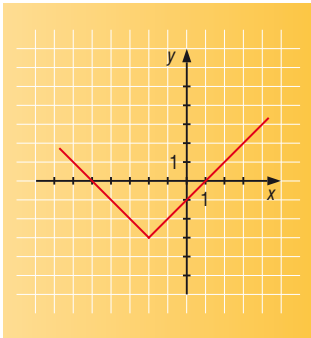


A $]-\infty; -3]$ -on szigorúan monoton csökkenő a függvény, a $[-3; 0[$ -on pedig szigorúan monoton növekvő.

Zérushelye: $x_0 = -3$.

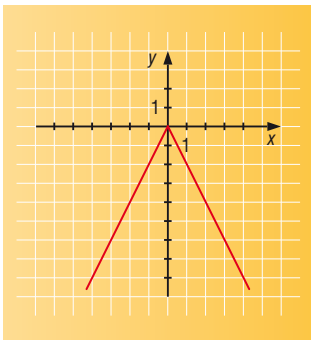
Szavakban: A negatív valós számokhoz rendeljük hozzá a náluk hárommal nagyobb számok abszolút értékét!

2. a)



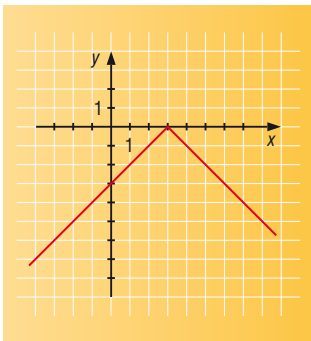
Minimuma van az $x = -2$ helyen: $a(-2) = -3$. Az 5-öt két helyen veszi föl: $x_1 = -10$ -nél és $x_2 = 6$ -nál.

b)



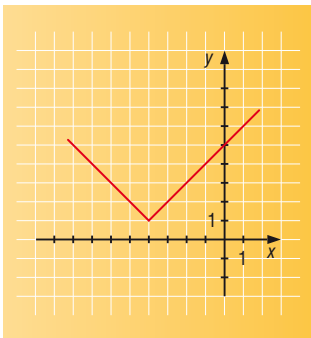
Maximuma van az $x = 0$ helyen: $b(0) = 0$. A függvény nem veszi fel sehol az 5-öt.

c)



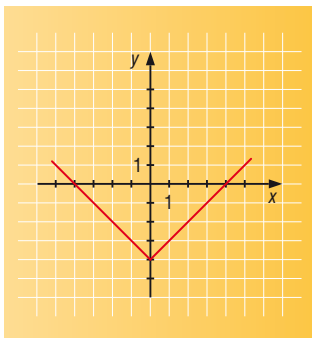
Maximuma van. Max. helye: $x = 3$, maximuma: 0. A függvény nem veszi fel sehol az 5-öt.

d)



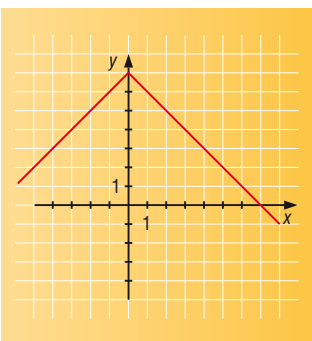
Minimuma van. Min. helye: $x = -4$, minimuma: 1. A függvény az 5-öt két helyen veszi föl: $x_1 = -8$ -nál és $x_2 = 0$ -nál.

e)



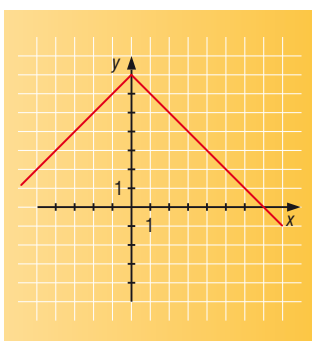
Minimuma van az $x = 0$ helyen: $e(0) = -4$. A függvény az 5-öt két helyen veszi föl: $x_1 = -9$ -nél és $x_2 = 9$ -nél.

f)



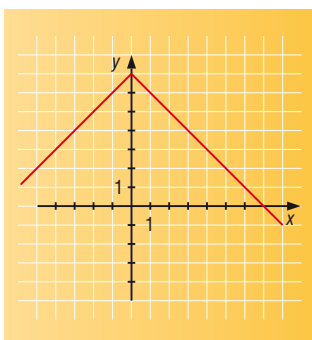
Maximuma van az $x = 0$ helyen: $f(0) = 7$. A függvény az 5-öt két helyen veszi föl: $x_1 = -2$ -nél és $x_2 = 2$ -nél.

3. a)



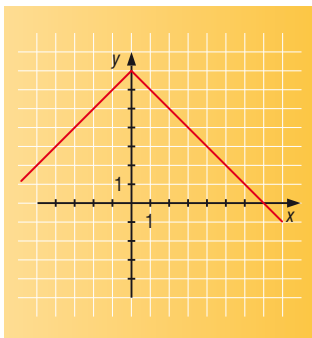
$D_f = [-6; 6]$, $R_f = [-5; 9]$, menete: a $[-6; 1]$ -on szig. mon. csökk.; az $[1; 6]$ -on szig. mon. növ. Az $x = 1$ helyen minimuma $f(1) = -5$. Az $x = -6$ helyen maximuma $f(-6) = 9$. Zérushelyei: $x_1 = -1,5$ és $x_2 = 3,5$. Nem páros.

b)



$D_g = \mathbb{R}$, $R_g =]-\infty; 2]$, menete: a $]-\infty; -4]$ -on szig. mon. növ.; a $[-4; \infty[$ -on szig. mon. csökk. Az $x = 4$ helyen maximuma $g(-4) = 2$. Zérushelyei: $x_1 = -6$ és $x_2 = -2$. Nem páros.

c)



$D_h =]-7; 4[$, $R_h =]-6; 5; -3]$, menete: a $]-7; 0]$ -on szig. mon. növ.; az $[0; 4[$ -on szig. mon. csökk. Az $x = 0$ helyen maximuma $h(0) = -3$. Minimuma nincs. Zérushelye nincs. Nem páros.

A függvények -1 , 2 illetve 5 helyen felvett helyettesítési értékei:

$$f(-1) = -1; \quad f(2) = -3; \quad f(5) = 3;$$

$$g(-1) = -1; \quad g(2) = -4; \quad g(5) = -7;$$

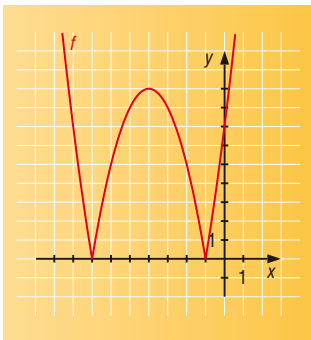
$$h(-1) = -3,5; \quad h(2) = -4; \quad h(5) \text{ nincs értelmezve.}$$

4. a) Növekvő az f függvény pl. a $] -1; 2[$ -on, a $] -7; 5[$ -on vagy a $] 6; 7[$ -on.

b) Az $|f|$ függvény növekvő pl. a $] -7; 5[$ -on, $] -3; -1[$ -on vagy a $] 7; 8[$ -on.

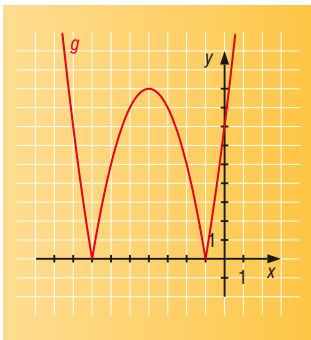
c) Az $|f|$ függvény növekvő pl. a $] -3; -1[$ -on, de ezen az intervallumon az f függvény csökkenő.

5. a)



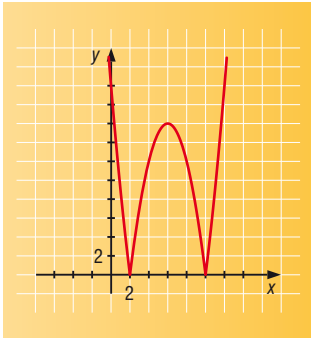
A $] -\infty; -7[$ -on csökkenő, a $] -7; -4[$ -on növekvő, a $] -4; -1[$ -on csökkenő, a $] -1; \infty[$ -on növekvő.

b)



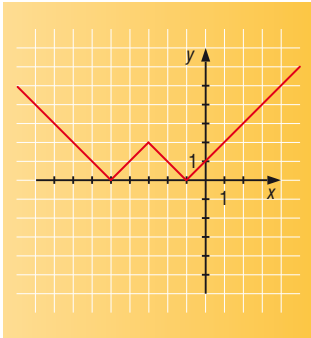
Észrevehető, hogy $g = f$, így képv. és menetük is ugyanolyan.

c)



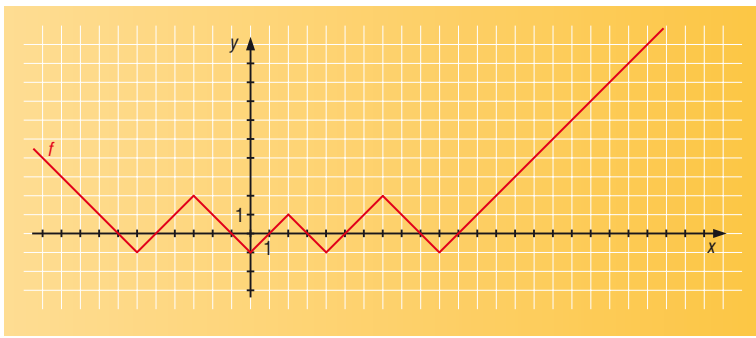
A $] -\infty; 2[$ -on csökkenő, a $] 2; 6[$ -on növekvő, a $] 6; 10[$ -on csökkenő, a $] 10; \infty[$ -on növekvő.

6. a)



$D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \mathbb{R}_0^+$, menete: a $] -\infty; -5[$ -on csökkenő, a $] -5; -3[$ -on növekvő, a $] -3; -1[$ -on csökkenő, a $] -1; \infty[$ -on növekvő. Két zérushelye van: $x_1 = -5$ és $x_2 = -1$. Ugyanezeneken a helyeken van minimuma a függvénynek, ami 0. Az $x = -3$ helyen a függvénynek helyi maximuma van. Nem páros.

b)

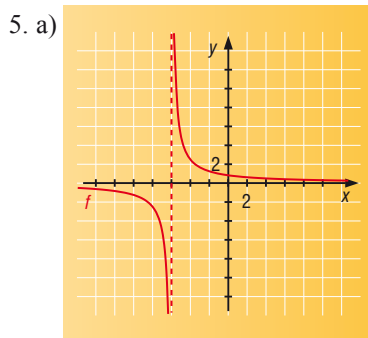
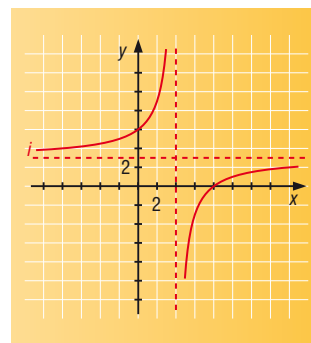
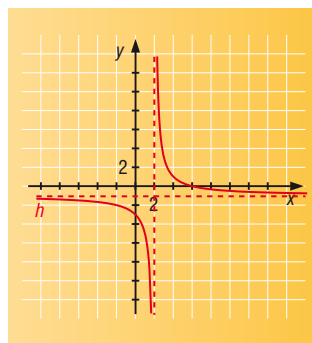
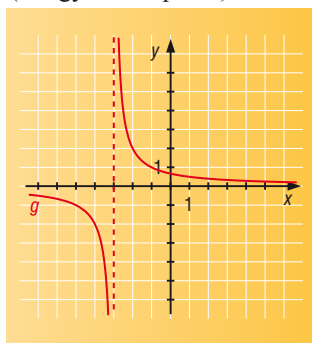
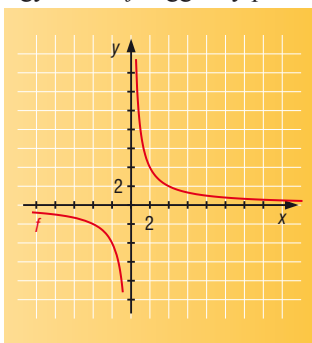


$D_g = \mathbb{R}$, $R_g = [-1, \infty[$. A függvénynek 7 töréspontja, ezeknek a helye: $-6, -3, 0, 2, 4, 7, 10$. Ezek 8 intervallumra bontják az x tengelyt, melyek közül az elsőt a függvény csökkenő, majd váltakozva növ. és csökk. Nyolc zérushelye van: $-7, -5, -1, 1, 3, 5, 9, 11$. Minimuma a -1 , amit -6 -nál, 0 -nál, 4 -nél és 10 -nél vesz föl. Helyi maximuma van az $x = -3$ helyen és az $x = 7$ helyen, ahol a helyi maximum: 2 , és az $x = 2$ helyen is, ahol a helyi maximum: 1 . Nem páros.

7. a) $A]-\infty; -1]$ -on csökkenő, a $[-1; 4]$ -on konstans, a $[4; \infty[$ -on növekvő.
 b) $A]-\infty; -5]$ -on konstans, a $[-5; 2]$ -on növekvő, a $[2; \infty[$ -on konstans.
 c) $A]-\infty; -2]$ -on növekvő, a $[-2; \infty[$ -on csökkenő.

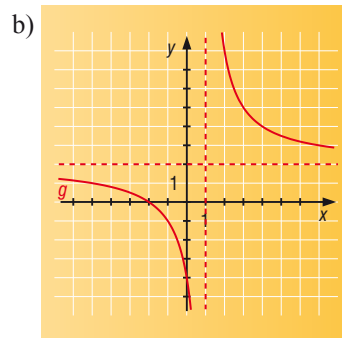
8. Fordított arányosság, lineáris törtfüggvény

- 1 méterre a forgástengelytől.
- A legdrágább alma kilója 400 Ft. A legolcsóbb almából 60 kilót is meg tudunk venni.
 Pl.: 150 Ft-os almából vehetünk 40 kilót, 120 Ft-osból 50 kilót, 240 Ft-osból 25 kilót. Az alma kilónkénti ára és az általunk megvásárolható mennyiség között fordított arányosság áll fenn (az állandó 6000 Ft-ot feltételezve).
- A fennálló fordított arányosság miatt a nyomás a 20-szorosára változik. (Feltételeztük az állandó hőmérsékletet.)
- Egyedül az f függvény páratlan (és egyik sem páros).

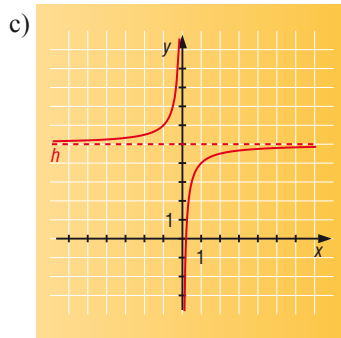


$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-6\},$$

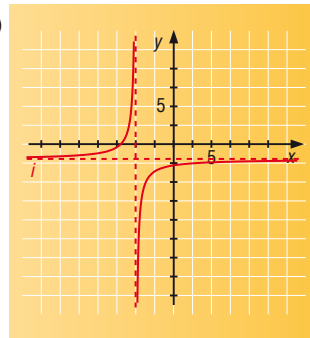
$$R_f = \mathbb{R} \setminus \{0\};$$



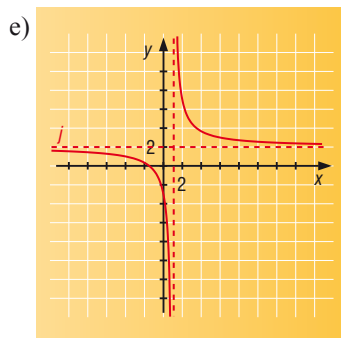
$$D_g = \mathbb{R} \setminus \{1\}, R_g = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$



$$D_h = \mathbb{R} \setminus \{0\}; R_h = \mathbb{R} \setminus \{5\};$$

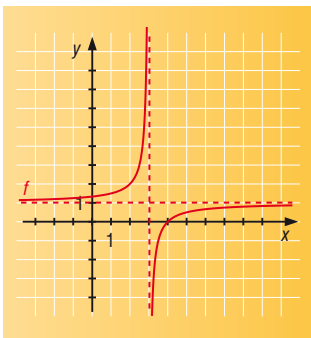


$$D_i = \mathbb{R} \setminus \{-5\}, R_i = \mathbb{R} \setminus \{2\};$$



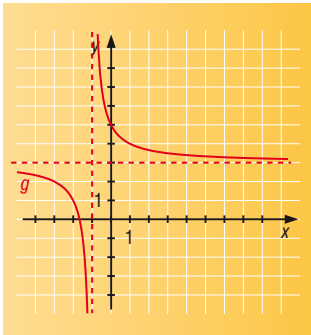
$$D_j = \mathbb{R} \setminus \{1\}, R_j = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

6. a)



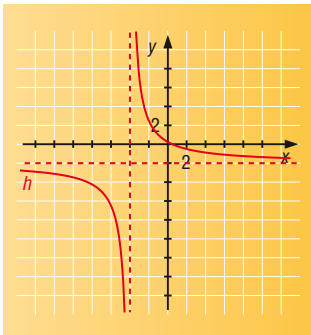
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, zérushelye: $x = 4$, menete: a $]-\infty; 3]$ -on csökk., és a $[3; \infty[$ -on is csökk.

b)



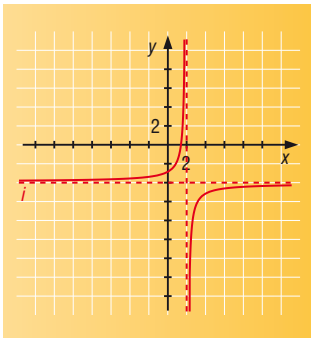
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{3\}$, zérushelye: $x = -\frac{5}{3}$, menete: a $]-\infty; -1]$ -on csökk., és a $[-1; \infty[$ -on is csökk.

c)



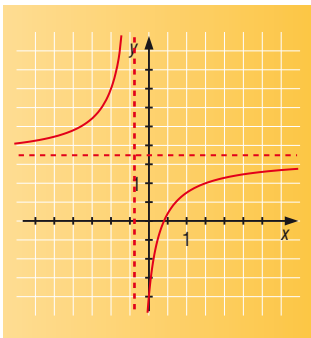
$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, zérushelye: $x = \frac{1}{2}$, menete: a $]-\infty; 3]$ -on csökk., és a $[3; \infty[$ -on is csökk.

d)



$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$, zérushelye: $x = \frac{3}{2}$, menete: a $]-\infty; 2]$ -on növ., és a $[2; \infty[$ -on is növekvő.

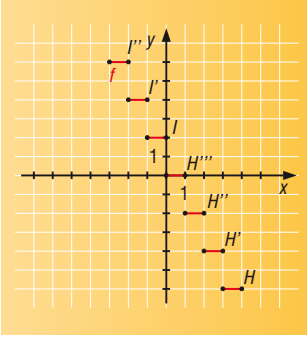
e)



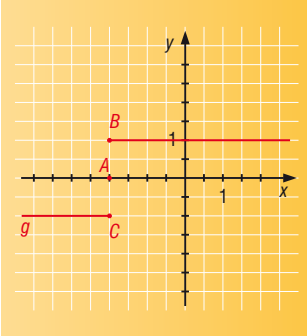
$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{3}\right\}$, $R_f = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{5}{3}\right\}$, zérushelye: $x = \frac{2}{5}$, menete: a $]-\infty; -\frac{1}{3}]$ -on növ., és a $\left[-\frac{1}{3}; \infty\right[$ -on is növekvő.

9. Egészrész-, törtrész- és előjelfüggvény (Kiegészítő anyag)

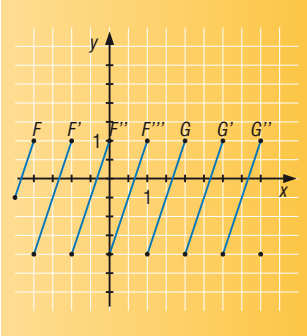
1. a) $D_f = \mathbb{R}$, $R_f = \{2n | n \in \mathbb{Z}\} = \{\text{páros számok}\}$, monoton csökkenő, zérushelye a $[0;1[$ intervallum minden eleme.



- b) $D_g = \mathbb{R}$, $R_g = \{-1; 0; 1\}$, zérushelye: $x = -2$, a -2 -nél nagyobb számok halmazán konstans 1 a függvény értéke, a -2 -nél kisebb számok halmazán konstans -1 .

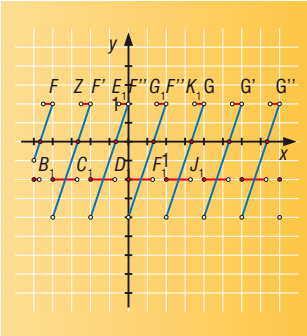


- c) $D_h = [-2; 5; 4]$, $R_h = [-2; 1]$, minden $n \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ esetén monoton növekvő a függvény az $[n; n+1[$ intervallumon, továbbá a $[-2; 5; 2[$ intervallumon is.



Zérushelyei: $\left\{-2\frac{1}{3}; -1\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 1\frac{2}{3}; 2\frac{2}{3}; 3\frac{2}{3}\right\}$.

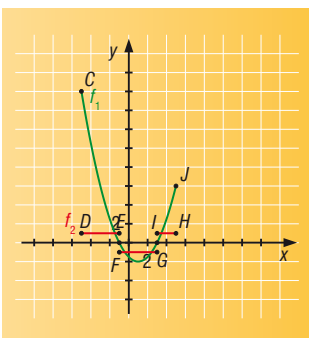
- d) A c) feladatbeli h függvényen alkalmazott előjel-függvény. Ahol a h függvény pozitív volt, ott lesz a j függvénynek az értéke 1, ahol a h függvény értéke negatív volt, ott lesz a j függvénynek az értéke -1 . A j függvény zérushelyei ugyanazok, mint a h függvényéi.



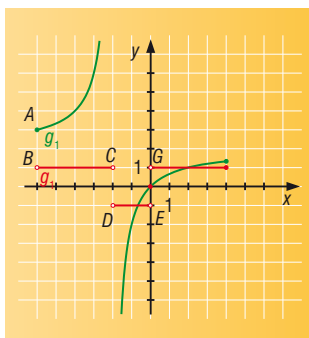
$D_j = [-2; 5; 4]$, $R_j = \{-1; 0; 1\}$.

2. A függőleges tengelyen a fizetendő pénzt ábrázoltuk, aminek grafikonja soha nem megy „alá” annak a jó közelítéssel egyenes grafikonú függvénynek, amit akkor kapnánk, ha a másodperc alapú számlázást ábrázolnánk. Viszont a 60. másodperceket kivéve mindig fölötté halad. Tehát semmi kockázat, minden töredék perc plusz bevételt jelent.

3. ábrák: a)



- b)

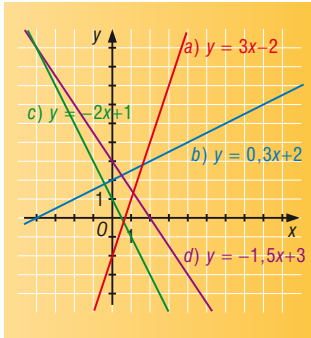


4. $7248 : 24 = 302$. Ha minden megkezdett beszélgetés alkalmával pontban az 59-edik másodpercben tette le a telefont a kisvállalkozó, akkor szélsőséges esetben lehetett egy összesen 301 perc 59 mp-es beszélgetése (kb. 6 óra). Különben ahányszor hívást kezdeményezett, annyi másodpercet kell levonnunk a 302 percből.

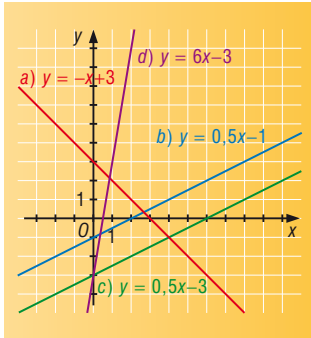
A legrosszabb esetben minden kezdeményezett hívása azonnal meg is szakadt, így „tárcsázhatott” akár 302-szer is anélkül, hogy 1 másodpercet is beszélt volna.

10. A koordináta-rendszer II.

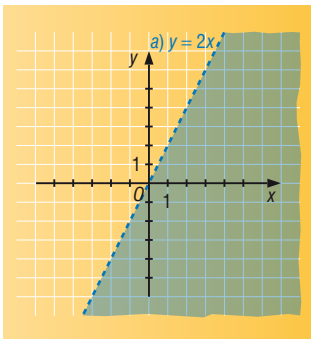
1. a) b) c) d)



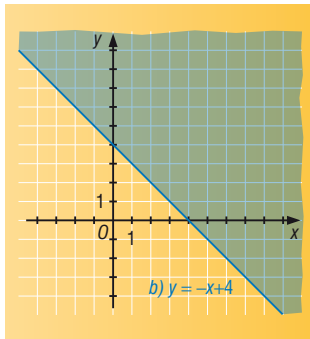
2. a) b) c) d)



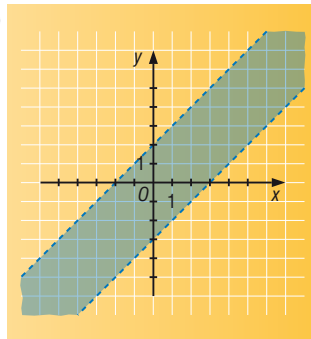
3. a)



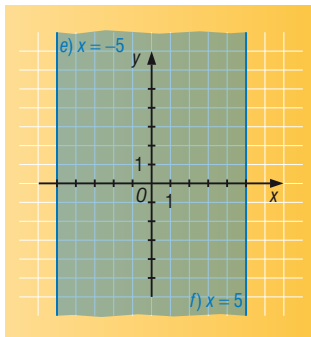
b)



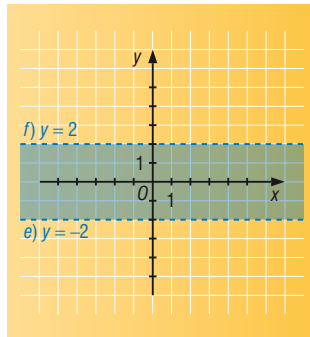
c)



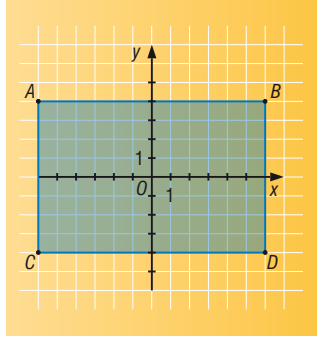
4. A halmaz:



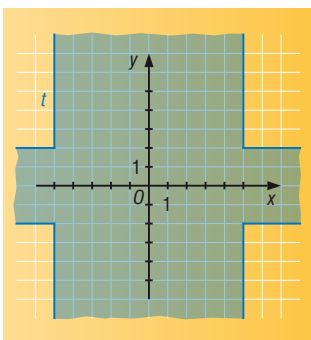
B halmaz:



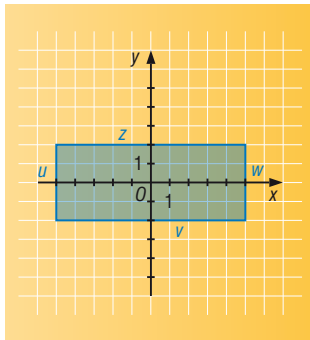
U halmaz:



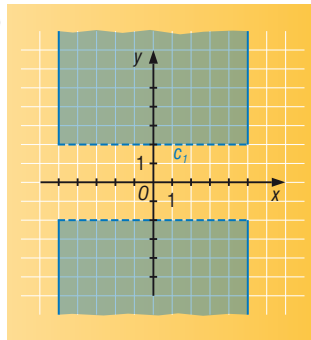
a)

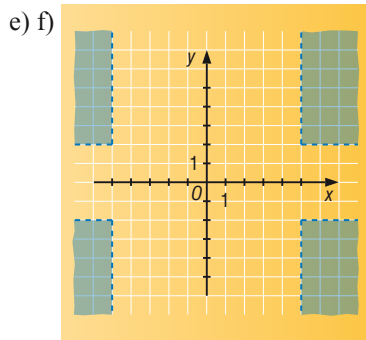
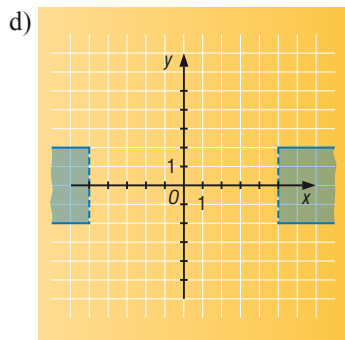


b)



c)





5. a) $A = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |y| = |x|\}$

b) $B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y \leq -|x| + 2\}$

c) $C = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, |y| \leq 4, |x| < 2\}$

6. a) 3025 b) 385

7. $825 + 385 = 1150$

8. 36

A geometria feladatainak eredményei

1. Térelemek kölcsönös helyzete, szöge Ismétlés I.

2. 60°

3. 108°

4. Felezzük meg a derékszöget!

5. Rajzoljunk! Két lehetőség adódik: vagy tompaszög: az 131° -os, vagy hegyesszög: az $180^\circ - 131^\circ = 49^\circ$.

6. 38°

7. 125°

8. Ötlet: a) Hosszabbítsuk meg az egyik szögcsúcsát!

b) Állítsunk merőlegest a szög csúcsában valamelyik szögcsúcsára!

8. 90°

9. A nagyobbik szögbe közös csúccsal másoljuk át a kisebbik szöget úgy, hogy az egyik szögcsúcs közös legyen. A másik szögcsúcsok által alkotott szög lesz a két szög különbsége.

10. a) 63° vagy 117° ; b) 90° (Itt csak ez az egy megoldás van, mert 90° -nak a kiegészítő szöge is 90° .)

c) 135° vagy 45° .

11. 72°

2. Sokszögek Ismétlés II.

1. a) 14; b) 35; c) 54.

2. 6

3. 7

4. 9

5. 48° ; 36° ; 96° . A külső szögek aránya: 11:12:7.

6. Készítsünk táblázatot! n : a sokszög oldalszáma, α_{\min} : a legkisebb, α_{\max} : a legnagyobb szöge.

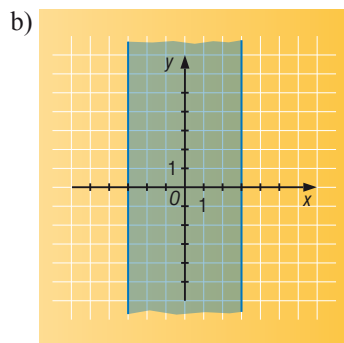
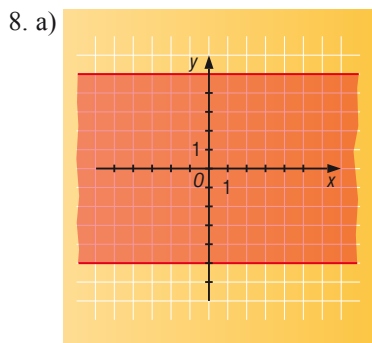
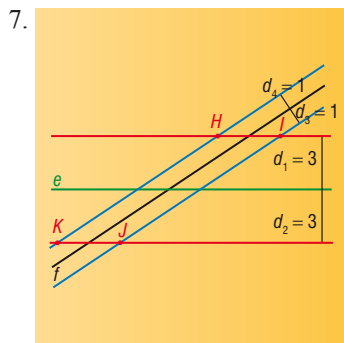
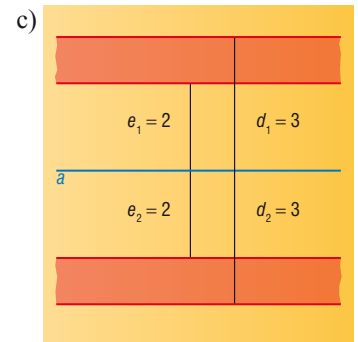
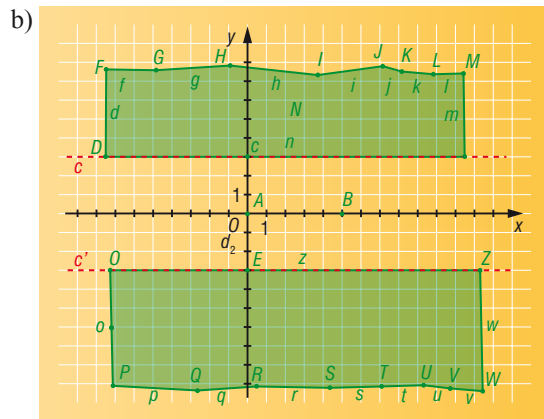
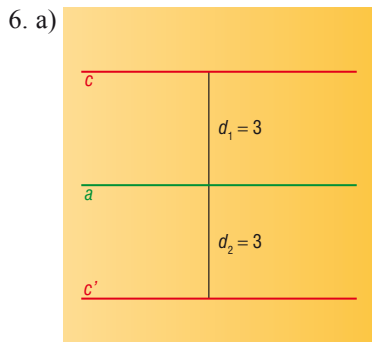
n	α_{\min}	α_{\max}
3	20°	100°
4	30°	150°
5	28°	188°
7	$8\frac{4}{7}^\circ$	$248\frac{4}{7}^\circ$

7. 4

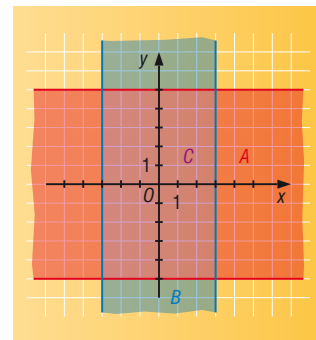
8. 35

3. Tételek távolsága, sokszögek osztályozása Ismétlés III.

1. Kb 600 m.
2. Az újszülöttek fejátmérője kb 10 cm. Célszerű tehát 10 cm-nél sűrűbb rácsozású ágyat használni.
3. Pl.: 3; 5; 7 vagy 11; 13; 17.
4. 22 db, köztük mindössze 3 háromszögnek különböző hosszú minden oldala.
5. Pl.: 1; 2; 4; 8 vagy 2; 3; 5; 8.

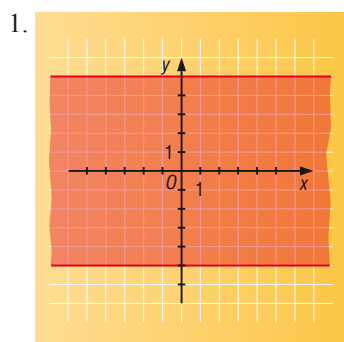


c) Egy téglalap határoló és belső pontjai.



9. a) Azon pontok halmaza, amelyek az e egyenestől legalább 3 cm és az f egyenestől legalább 4 cm távolságra vannak.
 b) Azon pontok halmaza, amelyek az e egyenestől legfeljebb 3 cm vagy az f egyenestől legfeljebb 4 cm távolságban vannak.

4. Speciális sokszögek



A leghosszabb átló: 6 cm.
 (A szabályos hatszög hat egybevágó szabályos háromszögre bontható.)

2. Rövid válasz: $200^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 40^\circ$ vagy $138\frac{6}{13}^\circ, 55\frac{5}{13}^\circ, 138\frac{6}{13}^\circ, 27\frac{9}{13}^\circ$.

Hosszú válasz:

A három adott arányú szög közül semelyik kettő nem lehet egymással szemközti.

Ha az 5 egységnyi szög nem illeszkedik a szimmetriatengelyre, akkor a négy szög aránya: 5:2:5:1, így nagyságuk $138\frac{6}{13}^\circ, 55\frac{5}{13}^\circ, 138\frac{6}{13}^\circ, 27\frac{9}{13}^\circ$. Ha az 1 egységnyi szög nem illeszkedik a szimmetriatengelyre, akkor a négy szög aránya: 5:1:2:1, így nagyságuk $200^\circ, 40^\circ, 80^\circ, 40^\circ$. Olyan deltoid pedig nincs, aminek a 2 egységnyi szög nem illeszkedik a szimmetriatengelyre, mert annak lenne egy 180° -os szöge.

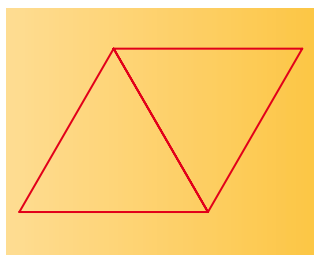
3. $70^\circ, 110^\circ, 70^\circ, 110^\circ$

4. 150°

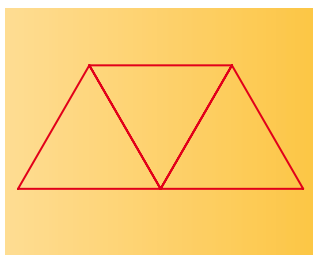
5. A rövidebb átló is a hosszúságú, és az oldalakkal 60° -os szöget zár be.

6. 18

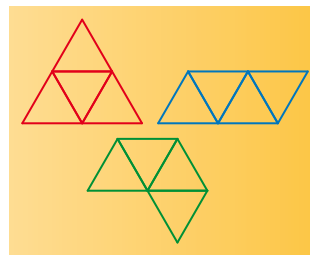
7. a) 1-féle: rombusz;



b) 1-féle: húrtrapéz;

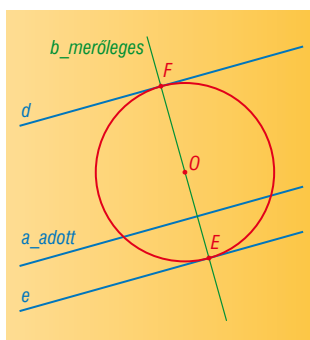


c) 3-féle: szabályos háromszög, paralelogramma, konkáv hatszög.



5. A kör és részei

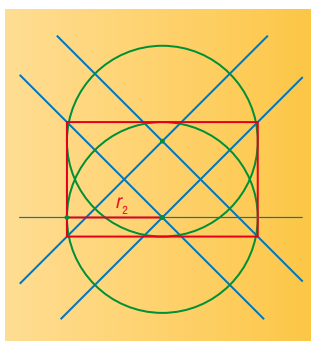
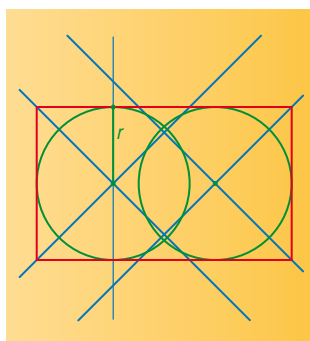
1.



I. Állítsunk merőlegest a kör középpontján át az adott egyenesre! Ennek a körrel vett metszéspontjai a keresett érintőknek az érintési pontja.

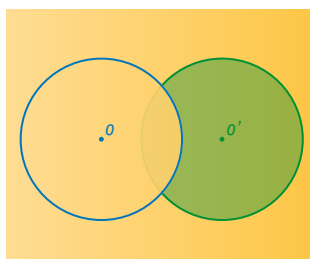
II. Az érintési pontokban állítsunk merőlegest az imént szerkesztett egyenesre.

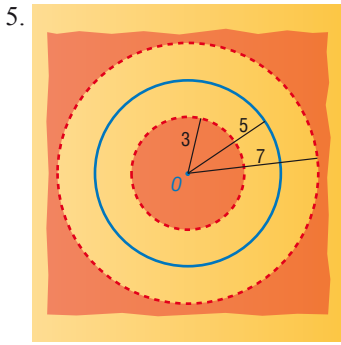
2. Négy megoldás.



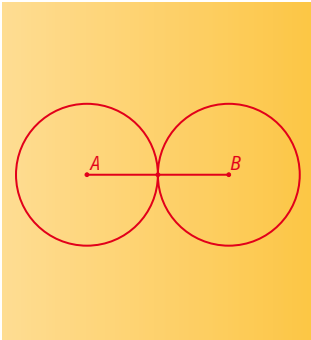
3. Az O ponttól 12 cm-nél távolabb, de 15 cm-nél közelebb lévő pontok halmaza. Vagy: Egy O középpontú 3 cm vastagságú körgyűrű, amelynek középköre 13,5 cm sugarú.

4.

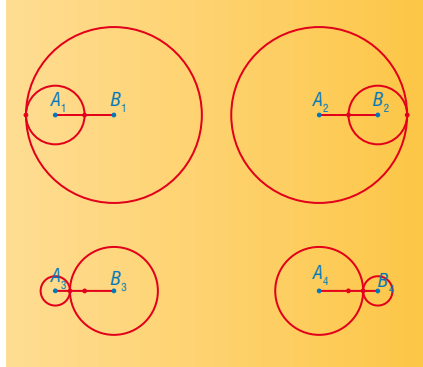




6. a) Egy ilyen kör van.

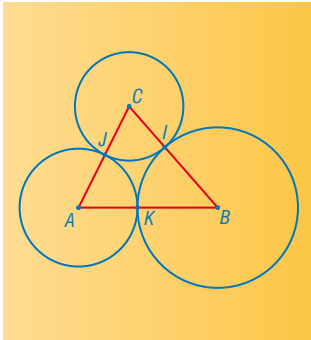


b) Négy ilyen kör van. (lásd ábra)



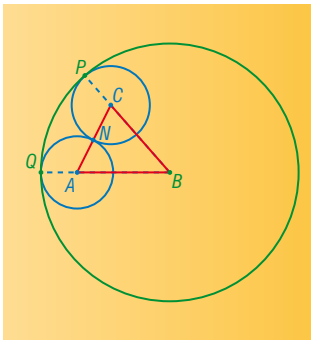
7. Az ábrákon látható kétféle elhelyezkedése lehet a három körnek.

I.



Ha páronként kívülről érintik egymást, akkor $AJ = AK$, $BK = BI$ és $CI = CJ$. Ezért a háromszög kerületének fele egyenlő a három kör sugarának összegével. Ez teszi lehetővé a szerkesztést: Az A körül szerkesztendő kör sugara $= \frac{K_{ABC}}{2} - BC$. Hasonló összefüggés teljesül a többire is, bár azokat a J és a K pont ismeretében már egyszerűbben is meg tudjuk szerkeszteni.

II.



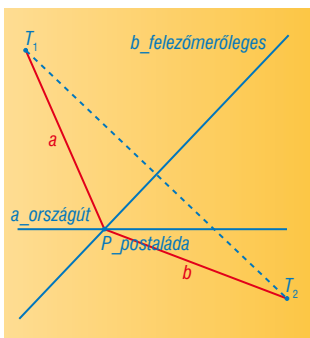
Ha az egyik kört (ábránkon a B körülit) a másik két csúcs köré rajzolt kör belülről érinti, akkor az AN szakaszt kiforgatva az A pont körül az az AQ szakaszba, a CN szakasz pedig C körüli forgatás után a CP szakaszba megy át. Így itt a B körüli nagy kör sugarának kétszerese lesz a háromszög kerülete. Az A körüli kör sugara tehát: $\frac{K_{ABC}}{2} - AB$.

A II. esetben a nagy kör természetesen bármelyik csúcs körül lehet, így az három különböző esetet ad. Minden háromszög esetében létezik mind a négy elrendezésben a három páronként egymást érintő kör. Megjegyzés: A körök érintési pontjai a beírt körnek a háromszög oldalaival vett érintési pontjai (I. eset), illetve a háromszöghöz hozzáírt köröknek a háromszög oldalegyenesével alkotott érintési pontjai (II. eset) – lásd 7. lecke.

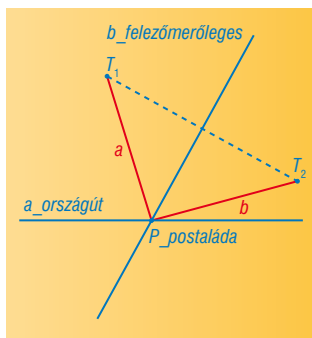
6. A háromszög köré írható kör

1. A tanyákat összekötő szakasz felezőmerőlegesének és az országút egyenesének metszéspontjába helyezzük a postaládát. Az első két ábrán 1-1 megoldás adódik. Ha a két tanyát összekötő szakasz felezőmerőlegese párhuzamos az országút egyenesével, akkor nincs megoldás. (3. ábra) Ha pedig egybeesik az országút egyenesével, akkor végtelen sok megoldás van. (4. ábra)

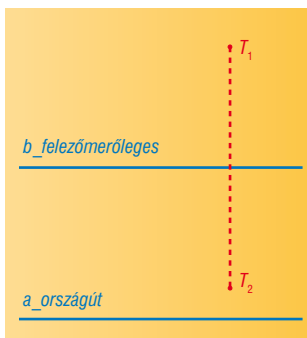
1. ábra



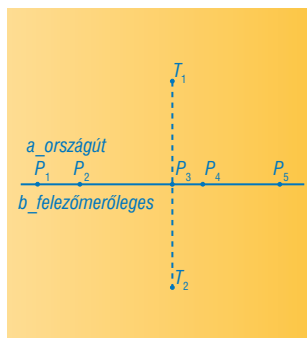
2. ábra



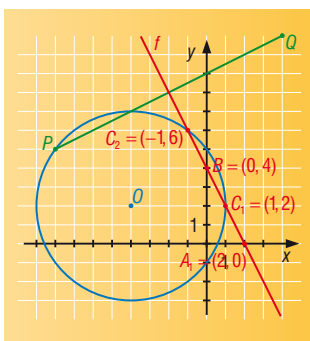
3. ábra



4. ábra



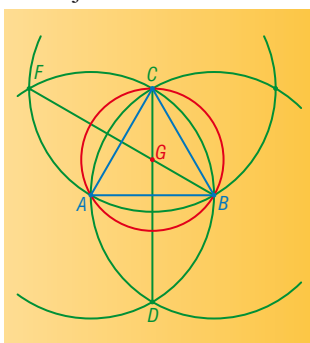
2.



- a) $A(2;0)$;
- b) $B(0;4)$;
- c) $C_1(1;2)$; $C_2(-1;6)$

3. Egy aktuális térképen megszerkesztve a három várostól egyenlő távolságra lévő pontot láthatjuk, hogy országhatáron kívülre esne a torony.

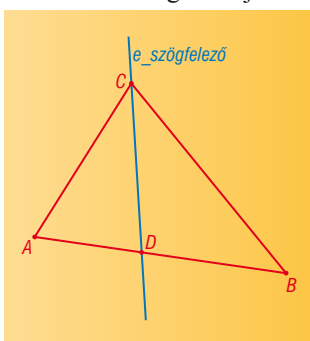
4. Próbáljuk minél kevesebb körhasználattal megoldani a szerkesztést!



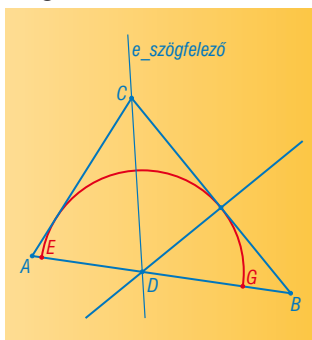
5. a) és c) Általános paralelogrammánál és trapéznál négy ilyen kör van. b) Tetszőleges téglalagnál csak 1 kör van.

7. A háromszögbe írható kör

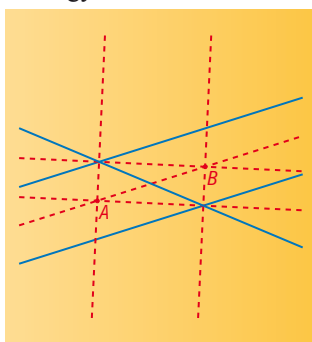
1. Az ACB szögfelezőjének és az AB oldalnak a metszéspontja.



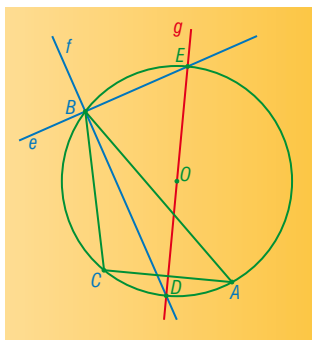
2. A szerkesztendő félkör középpontjának egyenlő távolságra kell lennie a háromszög másik két oldalától. (Lásd 1. feladat)
Nincs ilyen félkör, ha a háromszög olyan oldalára illeszkedne az átmérője, amelyhez csatlakozó szögek közül az egyik tompaszög.



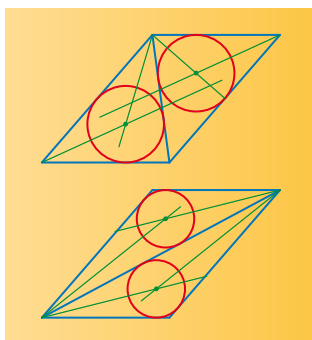
3. Kettő. Ugyanolyan gondolatmenet kell használnunk, mint annak igazolásakor, hogy a háromszög szögfelezői egy pontban metszik egymást.



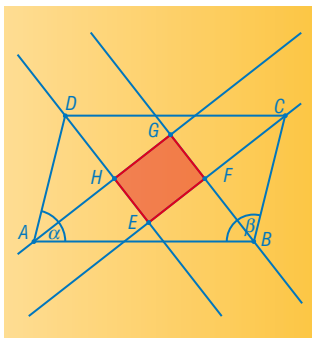
4. Az egyenesek két szögfelezője a B csúcson kívül ott metszi a kört, ahol az AC oldal felezőmerőlegese.



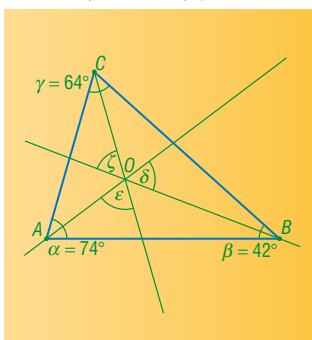
5. Más-más kert alakul ki, ha másik átlót választanak.



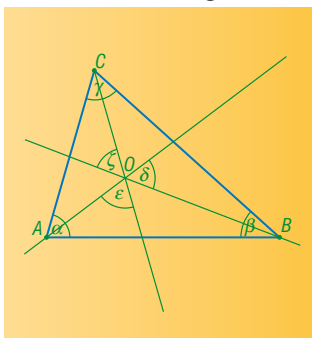
6. Ötletek: A szemközti szögek szögfelezői egyirányúak. Akkor esnek egybe, ha a paralelogramma rombusz is egyben. Ekkor a másik két szögfelező is átmegy a rombusz középpontján. Ha pedig nem rombusz, akkor a szemközti szögek szögfelezői párhuzamosak, tehát paralelogrammát alkotnak. De az ábrán pl. az AGB háromszögről könnyű belátni, hogy derékszögű (mivel $\alpha + \beta = 180^\circ$).



7. $\delta = 58^\circ$, $\varepsilon = 69^\circ$, $\zeta = 53^\circ$



8. Az AOB háromszögnek külső szöge δ , ezért $\delta = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$. Ugyanígy $\varepsilon = \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2}$ és $\zeta = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$.



8. Területszámítás

1. $m_1 = m_c$, $m_2 = m_b$, $m_3 = m_a$ Használjuk a háromszög területképletét! $T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2}$.

2. 32 cm^2

3. Mindkét válasz: $\frac{\pi}{2} \approx 1,57$.

4. a) 25-szörösére, b) 49-szeresére, c) n^2 -szeresére változik.

5. a) 6-szorosára, b) 10-szeresére, c) k -szorosára, d) \sqrt{n} -szeresére nőtt.

6. Kössük össze a csúcsot a szemközti oldal felezőpontjával. (súlyvonal)

7. $K = 60 \text{ cm}$

8. 24 cm (Gondolkozzunk el rajta, hogy biztosan van-e ilyen háromszög!)

9. A háromszög bármelyik magassága legfeljebb akkora, mint a vele közös csúcsból kiinduló oldalak. Így a 16 cm -es oldal csak merőleges lehet a 18 cm -es magasságra, tehát $T = \frac{16 \cdot 18}{2} = 144 (\text{cm}^2)$.

10. A Prézli számára nem tiltott háromszög alakú terület beírható körének középpontjába érdemes leszúrni a karót. Használjuk a Heron-képletet és a $T = \frac{Kr}{2}$ összefüggést!

$K = 36 \text{ m}$, $T = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{18 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1} = 36 \text{ (m}^2\text{)}$, $r = \frac{2T}{K} = 2 \text{ (m)}$. Legfeljebb 2 m hosszú pórázon köthetik ki Prézlit.

9. A Pitagorasz-tétel I.

- a) 5 cm, b) 25 cm, c) 26 cm
- a) 30, b) $\sqrt{380} \approx 19,49$. c) $\sqrt{2x+1}$
- A szárak hossza: 10 egység, a hozzájuk tartozó magasságok hossza: 9,6 egység.
- Két eset van: 13 egység vagy 27 egység.
- Az átlók hossza 12 cm, a kerület: $K = 2 \cdot \sqrt{45} + 2 \cdot \sqrt{117} \approx 35,05 \text{ (cm)}$.
- 396 cm^2

10. A Pitagorasz-tétel II.

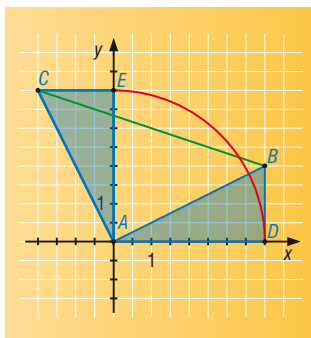
- $m = 4 \cdot \sqrt{3} \approx 6,93$ egység, $T = 16 \cdot \sqrt{3} \approx 27,71$ t.e.
- 10 cm és $5 \cdot \sqrt{3} \approx 8,66$ cm
- Kb. 29%-át.
- A 8.25 ábra jelöléseivel: (mindegyik sokszögnek legfeljebb kétféle hosszúságú oldala van)

Síkidom betűjele	Egyik oldala	Másik oldala	Területe (t.e.)
a	2	$2 \cdot \sqrt{2}$	2
b	1	$\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$
c	$\sqrt{2}$	2	1
d	1	1	1
e	1	$\sqrt{2}$	1

- $T = 120 \text{ cm}^2$, a beírt kör sugara: $r = \frac{15}{4}$ cm, a körülírt kör középpontja a háromszögön kívül van, sugara: $R = \frac{289}{16}$ cm.
- 7 cm. Az AC átló felezőmerőlegesének és az AB oldalnak a metszéspontja.
- Az a), b) és d) esetben derékszögű háromszöget kapunk a Pitagorasz-tétel megfordítása szerint, a c) és az e) esetben pedig nem derékszögű háromszöget kapunk a Pitagorasz-tétel szerint.

11. Geometriai transzformációk (bevezetés)

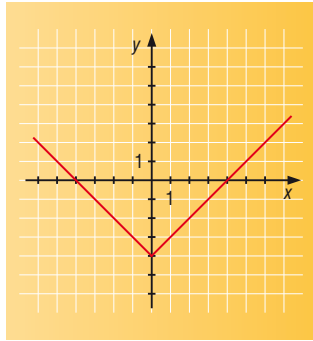
- Ezt az olvasóra bizzuk.
- a) $A'(-6;2)$, $B'(-1;4)$, $C'(2;3)$; b) $A'(6;-2)$, $B'(1;-4)$, $C'(-2;-3)$; c) $A'(-4;2)$, $B'(1;4)$, $C'(4;3)$;
d) $A'(2;6)$, $B'(4;1)$, $C'(3;-2)$.
- $A'(-1;7)$; $B'(-5;2)$; $C'(-3;-6)$; $D'(-1;-2)$
- $A'(3;0)$; $B'(7;2)$; $C'(1;4)$ (lásd ábra)



- nyolc vagy annál több
- 90° -os szöge csak egy lehet, így a másik két szög egyenlő: 45° -os. Egyenlő szárú, derékszögű a háromszög.



7. Téglalap vagy rombusz.



8. Néhány példa: tengelyesen szimmetrikus pl.:



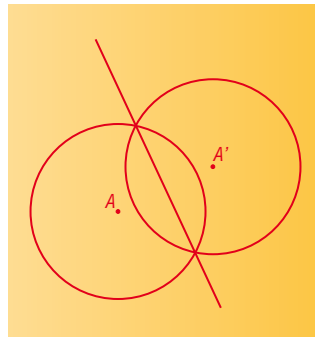
és forgásszimmetrikus pl.:



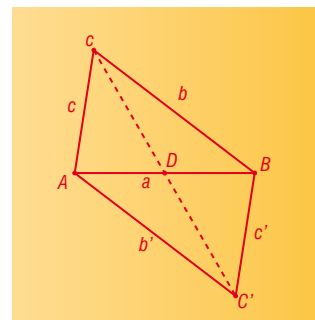
9. tengelyes, középpontos, és hatodrendű forgásszimmetriával

12. Geometriai transzformációkkal kapcsolatos szerkesztések

1. Tükrözzük a középpontot!

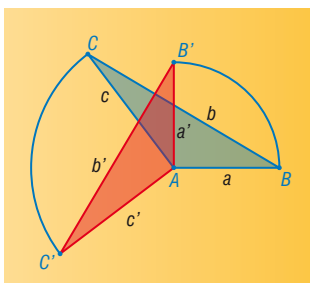


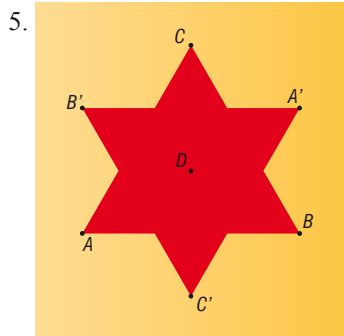
2. Használjuk ki a négyzet középpontja körüli negyedrendű forgásszimmetriáját!



3. Paralelogramma

4. 90°

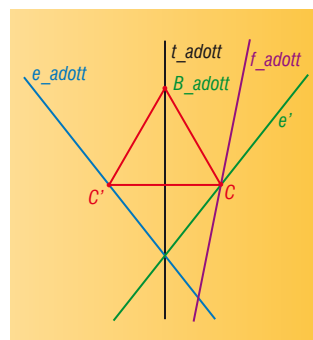
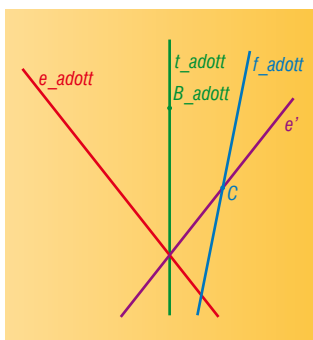
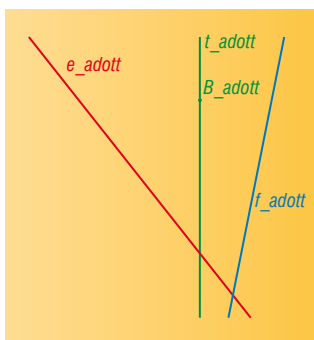




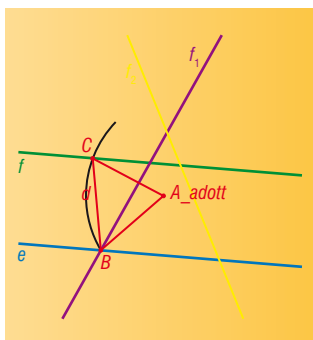
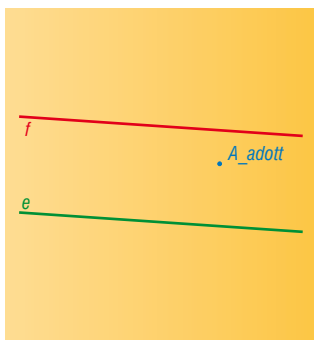
$6 \cdot \sqrt{3} \text{ cm}^2$. A közös rész szabályos hatszög, így tengelyesen is, középpontosan is szimmetrikus, és hatodrendű forgásszimmetriával is rendelkezik.

6. Ha az e' és az f egy pontban metszi egymást, akkor a háromszög mindig egyértelműen létezik (hacsak ez a metszéspont a B -vel összekötve nem merőleges a szimmetriatengelyre: ekkor nem szerkeszthető háromszög).

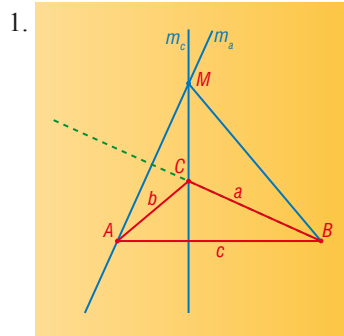
Ha e' és f nem metszi egymást, akkor szintén nincs háromszög. És ha e' egybeesik f -vel, akkor végtelen sok háromszög szerkeszthető a megadott feltételekkel. (Mindkét utóbbi esetben egyenlő nagyságú szöveget zár be az e és az f egyenes a t -vel.)



7. Forgassuk el az adott A pont körül pl. az f egyenest. Mivel a C pont A körüli 60° -os elforgatottja a B pont, így $B = f_1 \cap e$. (lásd ábra) Az f egyenes -60° -os elforgatásával másik háromszöghöz jutunk, ezt az ábrán már nem rajzoltuk meg.



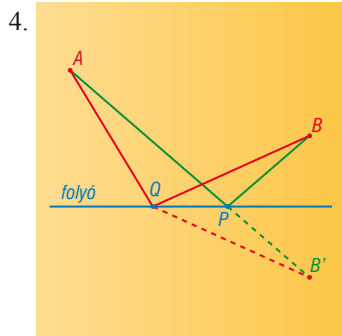
13. Geometriai transzformációkkal kapcsolatos bizonyítások



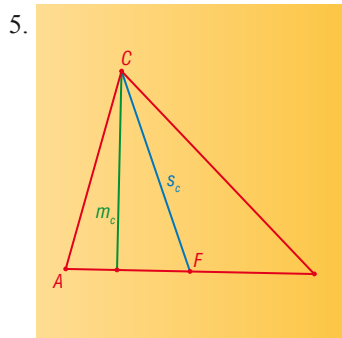
Az ABM háromszög magasságpontja C , mivel $m_c \perp AB$ és $m_a \perp BC$, vagyis m_c az ABM háromszög M csúcsához tartozó magasságvonal, a BC oldal egyenese pedig az ABM háromszög B csúcsához tartozó magasságvonala.

2. 98° , Ha derékszögű a háromszög, akkor nincs $KML\angle$. Ha α és β is hegyesszög, akkor $KML\angle = \alpha + \beta$. Ha α vagy β tompaszög, akkor $KML\angle = 180^\circ - (\alpha + \beta) = \gamma$.

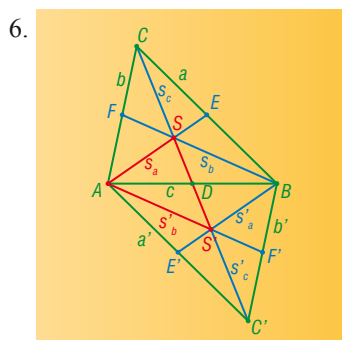
3. Ötlet: az egyik átló két háromszögre bontja a négyszöget. A négyszög szomszédos oldalfelező pontjait összekötő szakaszok e háromszögek középvonalai.



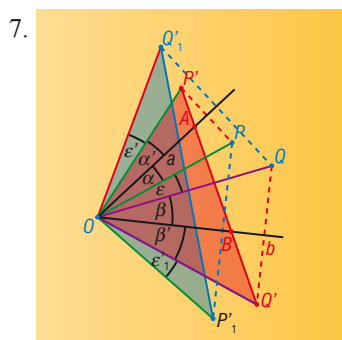
Az ábrán P ponthoz menjen az út. Más (Q) pont esetén hosszabb az $AQB = AQB'$ töröttvonal.



m_c közös magassága az AFC és az FBC háromszögnek, és $AF = FB$.



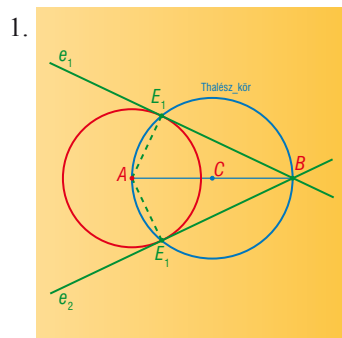
Tükrözzük az ABC háromszöget az egyik oldal felezőpontjára (D)! $AS = \frac{2}{3}s_a$, $AS' = \frac{2}{3}s_b$ és $SS' = 2SD = 2 \cdot \frac{1}{3}s_c = \frac{2}{3}s_c$. Az ASS' háromszög mindig létezik. Így (a háromszög-egyenlőtlenség szerint) létezik az s_a, s_b, s_c oldalú háromszög is.



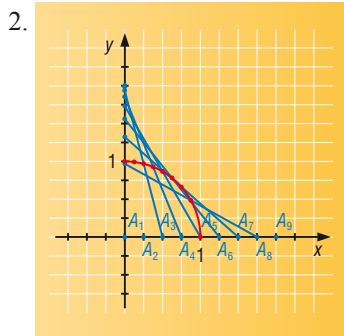
Az ábrán látható $PABQ$ töröttvonal a legrövidebb. Szerkesztési eljárás: P -t tükrözzük az egyik szögcszárára, Q -t a másikra úgy, hogy a PP' és a QQ' szakasz ne menjen át a POQ szögtartományon! A és B a $P'Q'$ metszéspontjai a szögcszárakkal. A tükrözés gondolata a korábbiak alapján indokolt lehet. (Gondoljuk végig! Másik töröttvonal csak hosszabb lehetne.) De miért nem mindegy, melyik szögcszárára tükrözzük?

Az egyforma színnel jelölt szakaszok a tükrözések miatt egyenlők, és $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\varepsilon = \varepsilon' = \varepsilon_1$. A kék $P'Q'$ háromszögnek O -nál $2\alpha + 2\beta + 3\varepsilon$ nagyságú szöge van, és az ezt közrefogó két oldala egyenlő a P_1OQ_1 (piros) háromszög két O -ból induló oldalával, de azok szöge csak: $2\alpha + 2\beta + \varepsilon$. Így a (kék) $P'Q'$ szakasz hosszabb, mint a (piros) P_1Q_1 szakasz.

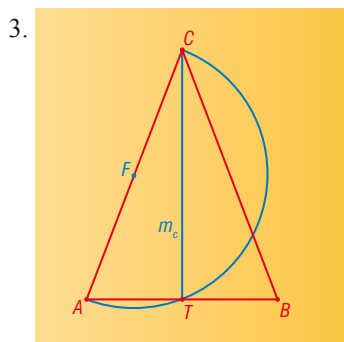
14. Thalész tétele



$$BE_1 = BE_2 = \sqrt{40} \approx 6,32 \text{ cm}$$

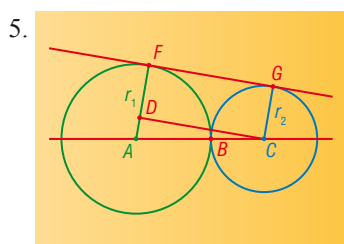


2. Egy 1 m sugarú negyed körívet a létra kezdeti talppontja körül.



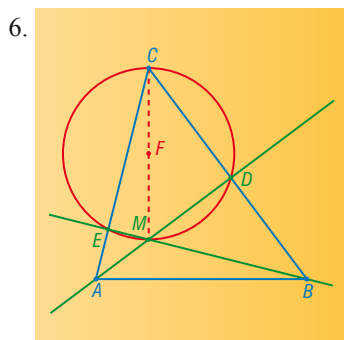
3. A körvonal pontjaiból derékszögben látszik az adott szár, így a körvonal alappal való metszéspontjából is. CT tehát merőleges AB -re, vagyis az AB oldalhoz tartozó magasság, ami felezi az egyenlő szárú háromszög alapját.

4. A négyzet középpontja minden oldal mint átmérő fölé emelt körre illeszkedik.



$$FG = DC, \quad DC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + 2r_1r_2 + r_2^2 - r_1^2 + 2r_1r_2 - r_2^2 = 4r_1r_2$$

$$FG = \sqrt{2r_1 \cdot 2r_2} = \sqrt{d_1 \cdot d_2}$$



6. A két talppontból derékszögben látszik a CM szakasz, így rajta vannak CM Thalész-körén. Bármilyen (tomposzögű, derékszögű) háromszögre teljesül, aminek C -nél nincs derékszöge. (Ekkor ugyanis a négy pont egybeesik.)

7. Pl. egy konkáv deltoid.

8. Három eset van: 3 cm, 5 cm vagy 6 cm.

9. a) Vegyünk fel egy kört és annak egy tetszőleges átmérőjét, valamint egy erre nem illeszkedő E pontját! Az átmérő két végpontjában állítsunk merőlegest az átmérőre (az alapok egyenesére)! Az E pontban pedig szerkesszünk szintén érintőt a körhöz (az egyik szár egyenesére)! Ezt tükrözzük a felvett átmérő egyenesére (A másik szár egyenesére)!

b) Az alapokkal párhuzamos középvonal hossza az alapok összegének fele, ami egyenlő a szárak összegének felével, vagyis egy-egy szár hosszával.

15. Körív hossza, körcikk területe, ívmérték

1. a) $\frac{14}{3}\pi$ dm \approx 14,66 dm ; b) 21π dm \approx 65,97 dm ; c) $\frac{133}{45}\pi$ dm \approx 9,285 dm

2. a) $\approx 89,95^\circ \approx 90^\circ$; b) $\approx 17,19^\circ$; c) 1 rad $\approx 57,3^\circ$; d) 2 rad $\approx 114,6^\circ$

3. 192 m

4. Kb. 1670 km-t tesz meg, területi sebessége: $1670 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

5. $11,25^\circ = \frac{\pi}{16} \text{ rad}$

6. 19293 m^2

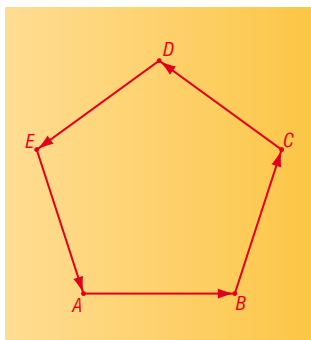
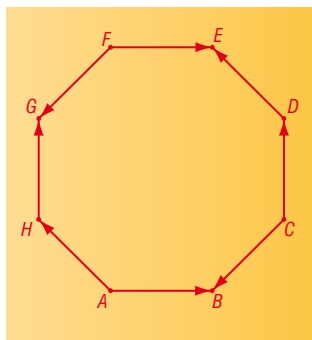
7. a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{2\pi}{3}$; d) $\frac{4\pi}{3}$; e) $\frac{\pi}{5}$; f) $\frac{49}{60}\pi$

8. a) 90° ; b) 270° ; c) 225° ; d) 300° ; e) 15° ; f) 105°

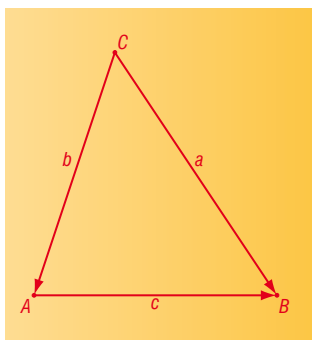
16. Vektorok, műveletek vektorokkal

1. $\overline{BC} = \vec{b}$; $\overline{CD} = -\vec{a}$; $\overline{AC} = \vec{a} + \vec{b}$; $\overline{BD} = \vec{b} - \vec{a}$; $\overline{AK} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$; $\overline{KD} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$

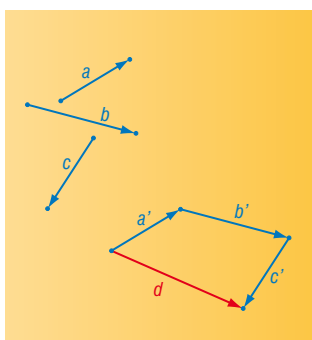
2. a) b) Pl. az ábrán látható módon; c) lásd ábra



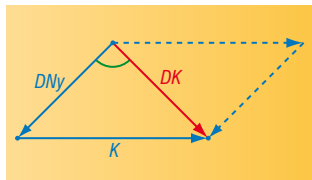
3. lásd ábra



4. lásd ábra



5.



DNy felé 12 km, K felé $12 \cdot \sqrt{2} \text{ km} \approx 17 \text{ km}$. Az ábrán szaggatott vonallal megrajzoltuk a másik lehetőséget is.

6. Használjuk a „13.6.” ábrát! $\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} = \overline{SA} + \overline{AS'} + \overline{S'S} = \overline{SS} = \vec{0}$

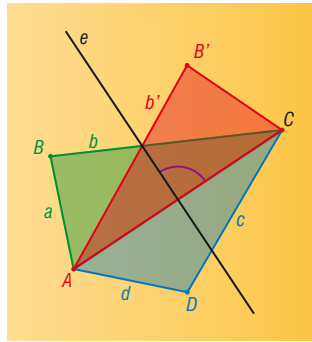
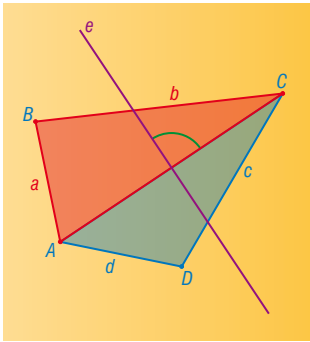
7. $-\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j}$; $-\vec{b} = -4\vec{i} - \vec{j}$; $\vec{a} + \vec{b} = 7\vec{i} - 4\vec{j}$; $2\vec{a} - \vec{b} = 2\vec{i} - 12\vec{j}$; $\frac{3}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{13}{2}\vec{i} - 7\vec{j}$

17. Síkidomok egybevágósága

1. a); b); e); f) igaz, c), d) nem igaz

2. Használjuk ki, hogy az átlók merőlegesen felezik egymást!

3. Nem. Pl. a két ábrán páronként egybevágó háromszögekből áll az $ABCD$ és az $AB'CD$ négyszög, mégsem egybevágók. (Más típusú ellenpélda is található.)



Az egyenletek, egyenlőtlenségek feladatainak eredményei

1. Egyenlet fogalma

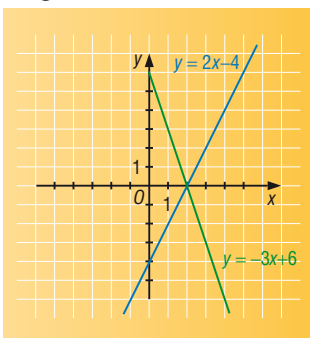
1. a) \mathbb{R} ; b) $[-4; \infty[\setminus \{3\}$; c) $\mathbb{R} \setminus \{3\}$; d) \mathbb{R} ; e) $]-\infty; 2]$; f) \mathbb{R} ; g) $[\frac{1}{2}; \infty[$; h) $\{ \}$.
2. Az $x = -\frac{6}{5}$, az $x = -\sqrt{2}$, az $x = 0, \dot{1}$, az $x = 5$ nem megoldásai az a), b), d), e), f) pontok alatti egyenleteknek. Az $x = -\frac{6}{5}$, az $x = -\sqrt{2}$, az $x = 0, \dot{1}$ nem megoldásai a c) pont alatti egyenletnek. Az $x = 5$ megoldása a c) pont alatti egyenletnek.
3. a) állítás, logikai értéke hamis; b) állítás, logikai értéke igaz; c) nem állítás;
 d) állítás, logikai értéke hamis; e) állítás, logikai értéke igaz; f) állítás, logikai értéke igaz; g) nem állítás.

	$x = 1$	$x = -2$	$x = \frac{2}{3}$	Igazsághalmaz
a)	hamis	hamis	hamis	$\{2\}$
b)	hamis	igaz	hamis	$\{2; -2\}$
c)	hamis	hamis	hamis	$\{-\frac{2}{3}\}$
d)	hamis	hamis	hamis	$\{ \}$
e)	hamis	hamis	hamis	$[6; \infty[$
f)	igaz	hamis	hamis	$\{1; 3; 5; 9; 15; 45\}$

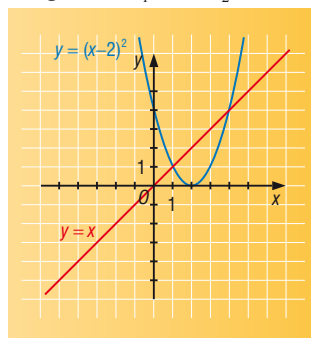
5. a) paralelogramma; b) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ -os belsőszögekkel rendelkező háromszög;
 c) trapéz; d) szabályos háromszög.

2. Egyenletek megoldása grafikus úton

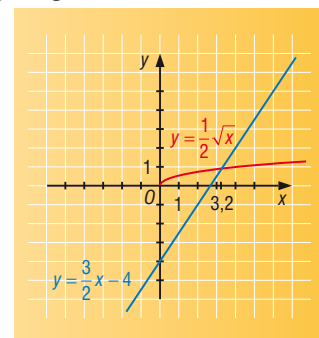
1. a) Megoldás: $x = 2$.



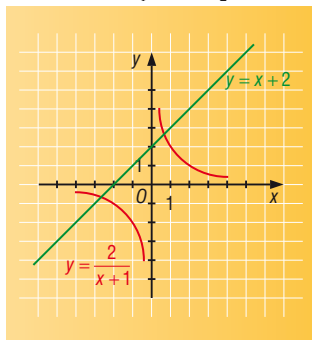
b) Megoldás: $x_1 = 1, x_2 = 4$.



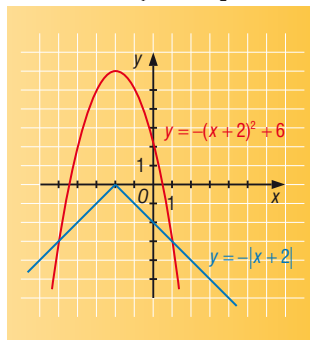
c) Megoldás: $x \approx 3,2$.



d) Megoldás: $x_1 = 0, x_2 = -3$.

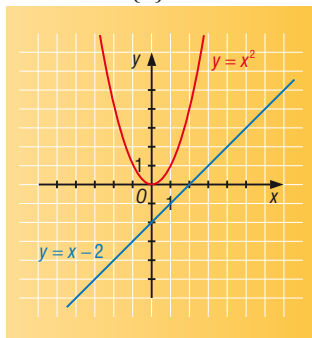


e) Megoldás: $x_1 = 1, x_2 = -5$.



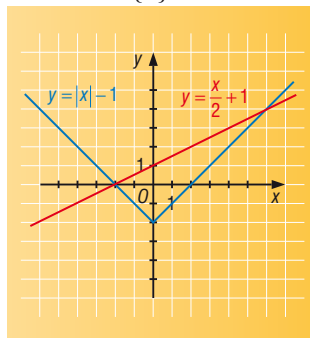
2. a) $x - 2 = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$)

Megoldás: $\{ \}$.



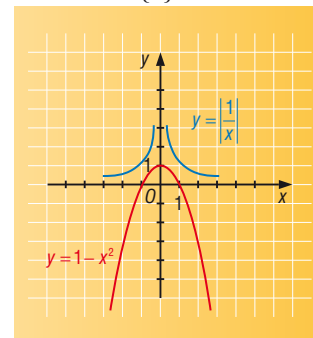
b) $\frac{x}{2} + 1 = |x| - 1$ ($x \in \mathbb{Z}$)

Megoldás: $\{4\}$.



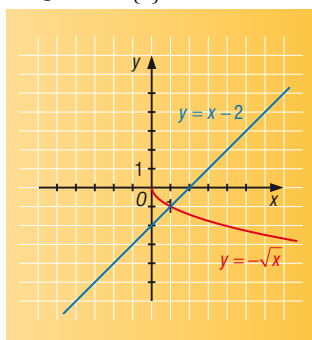
c) $1 - x^2 = \left| \frac{1}{x} \right|$ ($x \in \mathbb{R}$)

Megoldás: $\{ \}$.



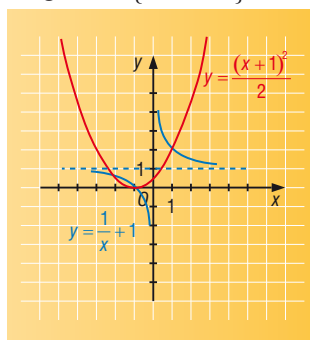
d) $-\sqrt{x} = x - 2$ ($x \in \mathbb{Q}$)

Megoldás: $\{1\}$.



e) $\frac{1}{x} + 1 = \frac{(x+1)^2}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$)

Megoldás: $\{-2; -1; 1\}$.



3. a) $p < -1$ esetén nincs megoldás; $p = -1$ vagy $p > 3$ esetén kettő megoldás van; $p = 3$ -nál három megoldása van; $-1 < p < 3$ esetén négy megoldás van;

b) $p < -\frac{1}{4}$ vagy $p > \frac{1}{4}$ esetén nincs megoldás; $-\frac{1}{4} \leq p \leq 0$ vagy $p = \frac{1}{4}$ esetén egy megoldás van; $0 < p < \frac{1}{4}$ esetén kettő megoldás van;

c) Bármely valós p paraméter esetén kettő megoldás van.

3. Egyenletek megoldása algebrai úton

1. a) $\left\{ \frac{20}{3} \right\}$; b) $\{320\}$; c) $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$; d) $\{19\}$.

2. a) $\left\{ \frac{170}{93} \right\}$; b) $\{3\}$; c) $\left\{ \frac{53}{78} \right\}$.

3. a) $\{ \}$; b) $\{6\}$; c) $\left\{ -\frac{1}{30} \right\}$; d) $\left\{ \frac{3}{11} \right\}$; e) $\{2\}$; f) $\{-3\}$.

4. a) $\{4\}$; b) $\{ \}$; c) $\{(-3; -6; 9)\}$; d) $\{(3; -2; 5)\}$; e) $\left\{ \left(5; \frac{1}{2} \right) \right\}$; f) $\{(1; 2); (1; -2)\}$; g) $\{9\}$; h) $\{-1\}$.

5. a) $\{10\}$; b) $\{12\}$; c) $\{28\}$; d) $\{153\}$.

6. A keresett egészek: 5 és 5; 5 és -5; -5 és -5; -1 és 7; -1 és -7; 1 és -7; 1 és 7.

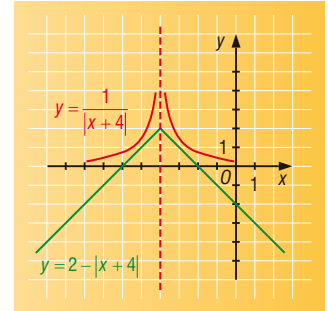
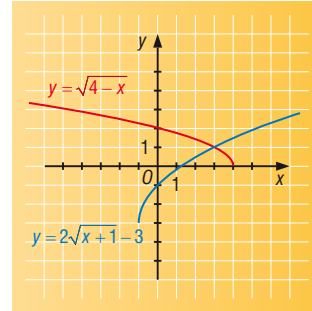
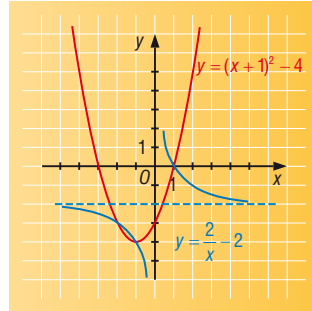
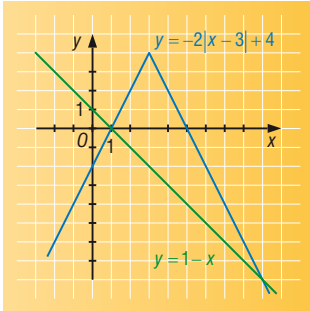
7. a) $]-\infty; 12]$; b) $[-4; \infty[$; c) $\{9\}$; d) $[0; \infty[$.

8. a) $\left\{-2; \frac{9}{2}; 5\right\}$; b) $\{-2; 3; 5\}$; c) $\left\{-\frac{3}{2}; 5; 19\right\}$; d) $\left\{-2; -\frac{2}{5}\right\}$; e) $\{-1; 3; 4\}$.

4. Egyenlőtlenségek, egyenlőtlenség rendszerek

1. A termelés azon x kibocsátások mellett nyereséges, amelyekre $x \in [3, 54; 56, 46[$ teljesül.

2. a) Megoldás: $[1; 9]$. b) Megoldás: $]-2; -1[\cup]0; 1[$. c) Megoldás: $[-1; 3]$. d) Megoldás: $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.



3. a) $\mathbb{Z}^- \cup \{2; 1; 0\}$; b) \mathbb{Z}^+ ; c) $\mathbb{Z}^- \cup \{1; 0\}$.

4. a) $]-\infty; -\frac{2}{3}[\cup]5; \infty[$; b) $]-3; 4]$; c) $]-7; 3]$; d) $]-\infty; -6[\cup]2; 5]$; e) $[-8; 1[$; f) $]-20; -\frac{1}{2}[$;
g) $]-\infty; -1[\cup]0; 2]$; h) $]-\infty; -1[\cup]-\frac{2}{7}; 4]$.

5. a) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; b) $\{4; 6\}$; c) $\{(2; 1); (-2; 1)\}$; d) $\{ \}$.

5. Abszolútértéket tartalmazó egyenletek és egyenlőségek

1. a) $\{-1; 7\}$; b) $\{-5; 1\}$; c) $\{15; 21\}$; d) $\{ \}$; e) $\{-3; 3\}$; f) $\left[0; \frac{2}{3}\right]$; g) $]-2; 4[$;
h) $]-\infty; -2] \cup]0; \infty[$; i) $[0; 9; 2; 7]$; j) $]-\infty; -4[\cup]2; \infty[$; k) $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]\frac{11}{2}; \infty[$; l) $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$.
2. a) $\left\{\frac{8}{5}\right\}$; b) $\left\{-1; \frac{15}{7}\right\}$; c) $\left\{-\frac{90}{7}; -6\right\}$; d) $]-\infty; -1]$; e) $[-3; \infty[$; f) $\left[\frac{15}{2}; \infty\right]$.
3. a) $\{2\}$; b) $\{ \}$; c) $\left\{\frac{8}{3}\right\}$; d) \mathbb{R} ; e) $\{ \}$; f) $]-\infty; \frac{28}{13}[$.

4. a) $\{-1; 2, 8\}$; b) $]-\infty; -6[\cup]0; 3[\cup]\frac{9}{2}; \infty[$; c) $\{-12; -10; -6; -4; 0; 2; 6; 8\}$; d) $[-9; 3] \cup \left[6; \frac{15}{2}\right]$.

6. Szöveges feladatok I.

- A keresett kétjegyű szám a 17.
- Tehát 750 pólót nyereséggel, 250 pólót veszteséggel adott el.
- a) 12 liter 23%-os és 12 liter 35%-os sóoldatot kell összekeverni ahhoz, hogy 24 liter 29%-os sóoldatot kapjunk.
b) 30 liter 23%-os és 6 liter 35%-os sóoldatot kell összekeverni ahhoz, hogy 36 liter 25%-os sóoldatot kapjunk.
- A teljes vagyon 12000 livres volt, mind a négy fiú ugyanannyit, azaz 3000 livrest örökölt.
- Az első játékos 39, a második 21, a harmadik pedig 12 louis-val ült le játszani.
- A burkolat 10 nap alatt készült el.
- a) Ha ugyanabban az irányban közlekednek, akkor 2,8 s alatt haladnak el egymás mellett.
b) Ha egymással szemben közlekednek, akkor 1,2 s alatt haladnak el egymás mellett.

7. Szöveges feladatok II.

1. A háromszög belsőszögei: a) $45^\circ, 60^\circ, 75^\circ$; b) $18^\circ, 63^\circ, 99^\circ$; c) $\frac{300^\circ}{7}, \frac{420^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}$.

2. A háromszög belsőszögei: $\frac{180^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}, \frac{540^\circ}{7}$.
3. A trapéz szögei rendre: $\frac{1080^\circ}{7}, \frac{900^\circ}{7}, \frac{1620^\circ}{7}, \frac{2160^\circ}{7}$ vagy $\frac{1080^\circ}{7}, \frac{900^\circ}{7}, \frac{2160^\circ}{7}, \frac{1620^\circ}{7}$ vagy $67,5^\circ, 112,5^\circ, 45^\circ, 135^\circ$ vagy $67,5^\circ, 112,5^\circ, 135^\circ, 45^\circ$.
4. A deltoid szögei rendre: $15^\circ, 75^\circ, 195^\circ, 75^\circ$ vagy $18^\circ, 234^\circ, 18^\circ, 90^\circ$ vagy $\frac{45^\circ}{4}, \frac{585^\circ}{4}, \frac{225^\circ}{4}, \frac{585^\circ}{4}$.
5. a) A háromszög oldalai 48, 90, 102 cm hosszúságúak, a beírt kör sugarának hossza 18 cm.
b) A keresett pont a hosszabbik befogó azon pontja, amely a derékszögű csúcstól 32,2 cm távolságban van.
6. A keresett pont az A ponttól 5,5 cm, a B ponttól 2,5 cm távolságban van.
7. A keresett háromszög oldalainak hossza 3,3,1.

8. Elsőfokú egyenletrendszerek

1. a) $\left\{ \left\{ \frac{4}{11}; \frac{27}{11} \right\} \right\}$; b) $\{(-2; -5)\}$; c) $\{(-1; -1)\}$.
2. a) $\left\{ \left\{ 5; \frac{1}{2} \right\} \right\}$; b) $\{(2; 0)\}$; c) $\{(1; -2)\}$; d) $\{(x; 4x+1 | x \in \mathbb{R})\}$; e) $\{(6; 2)\}$; f) $\{(6; 11)\}$.
3. a) $a = -\frac{1}{2}$; b) $a \neq \frac{1}{2}$; c) $a = \frac{1}{2}$; d) nincsen ilyen a ; e) $a \neq \frac{1}{2}$.
4. a) $a = -4, b = 1$; b) $a = -4, b \neq 1$; c) $a \neq -4$; d) $b \neq 1$.

9. Egyenletrendszerrel megoldható feladatok

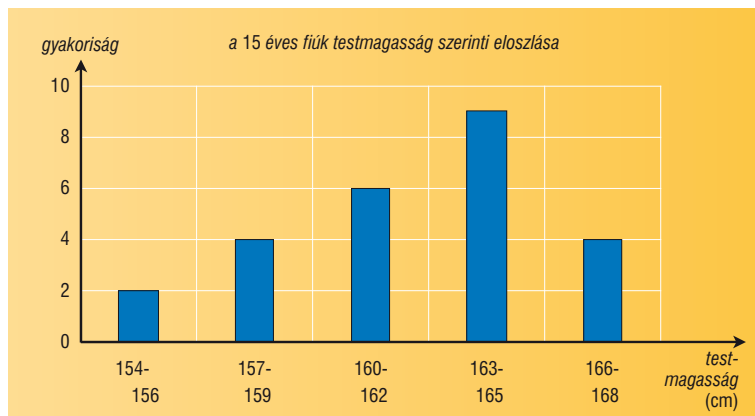
1. Az egyik sokszög 28, a másik 6 oldalú. A sokszögeknek együtt 359 átlója van.
2. A képeret belső mérete: 60×45 cm.
3. A jetski sebessége állóvízben $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$, a folyó sebessége $2 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.
4. a) $\{(0; 1)\}$; b) $\left\{ \left\{ \frac{3}{5}; \frac{2}{5} \right\} \right\}$; c) $\left\{ \left\{ x; \frac{3x}{5} | x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \right\}$.
5. $\{(1; 0; -1)\}$.
6. A téglatest egy csúcsba futó élei: 9 cm, 12 cm, 24 cm hosszúságúak, testátlója $3\sqrt{89}$ cm.
7. A téglatest térfogata 144 cm^3 , egy csúcsba futó élei 3 cm, 4 cm, 12 cm, testátlója 13 cm.

A statisztika feladatainak eredményei

1. Adatok megadása, szemléltetése

1. a) A testmagasság 3 cm-es csoportgyakorisága:

Testmagasság (cm)	Intervallumhoz tartozó gyakoriság
154-156	2
157-159	4
160-162	6
163-165	9
166-168	4



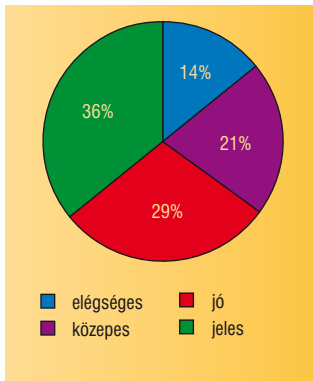
b) A matematika osztályzatok gyakorisági eloszlása:

Osztályzat	Gyakoriság
2	6
3	9
4	7
5	3

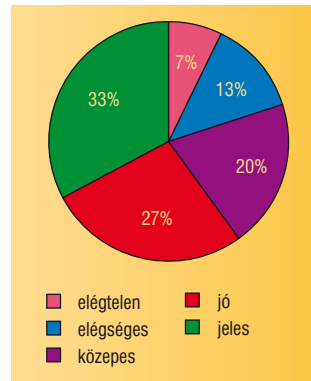
2. Középtértékek

1. a) $\bar{x} = 3,57$, $Mo = 3$, $Me = 4$;

b)



A 15 éves fiúk matematika osztályzat szerinti eloszlása



Az osztály történelem osztályzat szerinti eloszlása

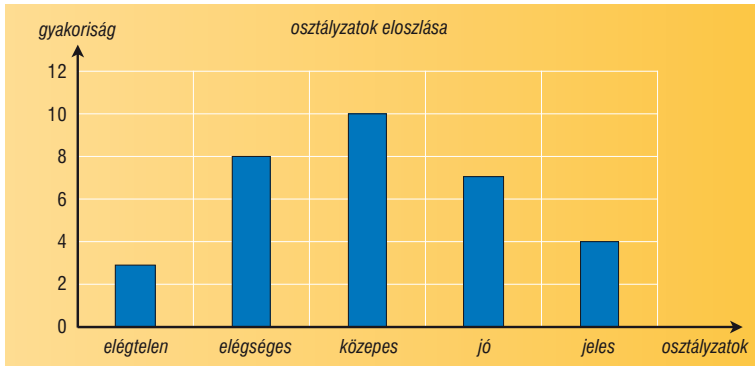
2. Az említett játékos magassága a pályán maradt játékosok magasságának átlagánál 6 cm-rel nagyobb.

3. a) Mind az átlag, mind a módusz, mind a medián 5-tel nő.

b) Mind az átlag, mind a módusz, mind a medián (-2)-szeresére változik.

4. a) Hét tanuló írt jó osztályzatú dolgozatot.

b)



c) $Mo = Me = 3$.

5. a) Van a feltételeknek eleget tevő számsokaság. Pl.: 2, 2, 2, 2, 3, 5, 8, 9024, 9024 ;

b) Van a feltételeknek eleget tevő számsokaság. Pl.: 1, 2, 2, 3, 3, 28, 28, 28, 17977 ;

c) Van a feltételeknek eleget tevő számsokaság. Pl.: 1, 2, 2, 3, 3, 1848, 1848, 1848, 12517 ;

d) Nem létezik a feltételeknek eleget tevő számsokaság.