

# Végeredmények, emelt szintű feladatok részletes megoldása

<b>I. A gyökvonás</b>	
1. A gyökfogalom kiterjesztése	2
2. A négyzetgyök alkalmazásai	4
3. A számok $n$ -edik gyöke	5
4. Az $n$ -edik gyökfüggvény, az $n$ -edik gyök alkalmazása	6
<b>II. Másodfokú egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek</b>	
1. Másodfokú függvény, másodfokú egyenlet	8
2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete	13
3. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok	13
4. A gyöktényező alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés	14
5. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek	16
6. Másodfokú egyenlőtlenségek	17
7. Négyzetgyökös egyenletek, egyenlőtlenségek	18
8. Számított középértékek	19
9. Szélsőérték-feladatok	21
10. Másodfokú egyenletrendszerek	23
<b>III. Hasonlóság és alkalmazásai</b>	
1. Vizsgálódás a térben	25
2. Középpontos hasonlóság	26
3. Hasonlósági transzformáció	28
4. A hasonlóság alkalmazásai	29
5. Hasonló síkidomok kerülete és területe, hasonló testek felszíne és térfogata	29
6. Egyéb nem egybevágósági transzformációk	31
7. Kerületi és középponti szögek	32
8. Húrnégyszögek, alkalmazások	33
<b>IV. Trigonometria</b>	
1. Távolságok meghatározása arányokkal	36
2. A hegyesszögek szögfüggvényei, összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között	38
3. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között	40
4. Síkgeometriai számítások	43
5. Térgeometriai számítások	44
6. Vektorok a koordinátasíkon	45
7. A szinusz és a koszinusz szögfüggvények általános értelmezése	47
8. A tangens és a kotangens szögfüggvények általános értelmezése	50
9. A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja, jellemzése	51
10. A tangens- és a kotangensfüggvény grafikonja, tulajdonságai	53
<b>V. Gondolkodási módszerek, kombinatorika, valószínűségszámítás</b>	
1. Skatulyaelv, tétel és megfordítása, egyszerű gráfelméleti fogalmak	57
2. Bevezető kombinatorikafeladatok, szorzási és összeadási szabály	58
3. Variációk	59
4. Permutációk, kombinációk	61
5. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből	62
6. Valószínűségi kísérletek, a valószínűség szemléletes fogalma	64

## 1. A gyökfogalom kiterjesztése (18-19. oldal)

1.  
 a) 25;    b) 12;    c) 4;    d) 5;    e) 27;    f) 3;    g) 70;    h) 3;    i) -21.
2.  
 a) 2;    b) 13;    c) 5;    d) 11;    e)  $10 - 2\sqrt{21}$  (Nem egész!);  
 f)  $56 + 24\sqrt{5}$  (Nem egész!);    g) 40;    h) 2;  
 i) A kifejezés biztosan pozitív, ezért ekvivalens átalakítást végzünk, ha a kifejezés négyzetét négyzetgyök alá tesszük:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{27+10\sqrt{2}} + \sqrt{27-10\sqrt{2}})^2} &= \sqrt{27+10\sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{27+10\sqrt{2}} \cdot \sqrt{27-10\sqrt{2}} + 27-10\sqrt{2}} = \\ &= \sqrt{54 + 2 \cdot \sqrt{(27+10\sqrt{2})(27-10\sqrt{2})}} = \sqrt{54 + 2\sqrt{27^2 - 100 \cdot 2}} = \sqrt{54 + 2\sqrt{529}} = \sqrt{100} = 10; \end{aligned}$$

- j) Az előzőhöz hasonlóan:

$$\begin{aligned} \sqrt{(\sqrt{19+6\sqrt{10}} - \sqrt{19-6\sqrt{10}})^2} &= \sqrt{19+6\sqrt{10} - 2 \cdot \sqrt{19^2 - (6\sqrt{10})^2} + 19-6\sqrt{10}} = \\ &= \sqrt{38-2} = 6. \end{aligned}$$

3.  
 a) bal oldal  $(-2\sqrt{2}) <$  jobb oldal  $(2\sqrt{2})$ ;  
 b) bal oldal  $(4) >$  jobb oldal  $(\sqrt{15})$ ;  
 c) bal oldal  $\left(\frac{23}{2}\right) <$  jobb oldal  $(12)$ .

4.  
 a) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{3}$  racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként!

$\sqrt{3} = \frac{p}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $p, q$  relatív prímek.

A  $q$ -val való beszorzás után emeljük négyzetre az egyenletet!  $3 \cdot q^2 = p^2$

Mivel az egyenlet bal oldala 3 többszöröse, ezért az egyenlet jobb oldalán álló  $p^2$  osztható kell, hogy legyen 3-mal, ami csak úgy teljesülhet, ha  $p$  is osztható 3-mal, tehát  $p^2$  9-cel is osztható.  $\Rightarrow$  Az egyenlet bal oldala is osztható 9-cel, azaz  $q^2$  osztható 3-mal, tehát  $q$  is osztható 3-mal.  $\Rightarrow p$  és  $q$  is osztható 3-mal, tehát nem relatív prímek.

A feltételezésünk alapján ellentmondásra jutottunk, vagyis a feltételezésünk – miszerint a  $\sqrt{3}$  racionális szám – hamis, így  $\sqrt{3}$  csak irracionális szám lehet.

- b) Az előzőhöz hasonlóan...

- c) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{10}$  racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként!

$\sqrt{10} = \frac{p}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $p, q$  relatív prímek.

A  $q$ -val való beszorzás után emeljük négyzetre az egyenletet!  $10 \cdot q^2 = p^2$

Mivel az egyenlet bal oldala páros, ezért az egyenlet jobb oldalán álló  $p^2$  páros kell, hogy legyen, ami csak úgy teljesülhet, ha  $p$  is páros, tehát  $p^2$  4-gyel is osztható.  $\Rightarrow$  Az egyenlet bal oldala is osztható 4-gyel, azaz  $q^2$  osztható 2-vel, tehát  $q$  páros.  $\Rightarrow p$  és  $q$  is páros, tehát nem relatív prímelek.

A feltételezésünk alapján ellentmondásra jutottunk, vagyis a feltételezésünk – miszerint a  $\sqrt{10}$  racionális szám – hamis, így  $\sqrt{10}$  csak irracionális szám lehet.

d) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{21}$  racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként!

$\sqrt{21} = \frac{p}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $p, q$  relatív prímelek.

A  $q$ -val való beszorzás után emeljük négyzetre az egyenletet!  $21 \cdot q^2 = p^2$

Mivel az egyenlet bal oldala 3 többszöröse, ezért az egyenlet jobb oldalán álló  $p^2$  osztható kell, hogy legyen 3-mal, ami csak úgy teljesülhet, ha  $p$  is osztható 3-mal, tehát  $p^2$  9-cel is osztható.  $\Rightarrow$  Az egyenlet bal oldala is osztható 9-cel, azaz  $q^2$  osztható 3-mal, tehát  $q$  is osztható 3-mal.  $\Rightarrow p$  és  $q$  is osztható 3-mal, tehát nem relatív prímelek.

A feltételezésünk alapján ellentmondásra jutottunk, vagyis a feltételezésünk – miszerint a  $\sqrt{21}$  racionális szám – hamis, így  $\sqrt{21}$  csak irracionális szám lehet.

e) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{a}$  ( $a \in \mathbb{Z}^+$ ) racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként! A feladat szerint  $a$  nem négyzetszám, azaz a prímtényezői alakjában legalább egy kitevő páratlan szám.

$a = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_n^{k_n}$  alakban legyen az  $i$ -edik prímtényező  $k_i$  kitevője a páratlan kitevő!

$\sqrt{a} = \frac{m}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $m, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $m, q$  relatív prímelek, és

$m > 1$ .

A  $q$ -val való beszorzás után emeljük négyzetre az egyenletet!  $a \cdot q^2 = m^2$

Mivel az egyenlet bal oldala  $a$  többszöröse, ezért az egyenlet jobb oldalán álló  $m^2$  osztható kell, hogy legyen  $a$ -val, azaz  $a$  minden prímtényezőjével (így  $p_i$ -vel is!). Mivel  $m^2$  négyzetszám, ezért prímtényezői felbontásában minden prímtényező kitevője páros, így  $p_i$  kitevője is. Mivel a bal oldalon a  $p_i$  kitevője páratlan, ezért ez ellentmondás, vagyis a feltételezésünk – miszerint a  $\sqrt{a}$  racionális szám – hamis, így  $\sqrt{a}$  csak irracionális szám lehet.

5.

a) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{5} - 1$  racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként!

$\sqrt{5} - 1 = \frac{p}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $p, q$  relatív prímelek.

Rendezve az egyenletet  $\sqrt{5} = \frac{p+q}{q}$  kifejezéshez jutunk, melynek jobb oldala racionális, de az

előző feladat alapján a  $\sqrt{5}$  irracionális szám, így ellentmondásra jutottunk.

b) A bizonyítás során alkalmazzuk az előző feladatban használt lépéseket.

c) *Indirekt* módon bizonyítva:

Tegyük fel, hogy  $\sqrt{3} + \sqrt{5}$  racionális szám, azaz felírható két egész szám hányadosaként!

$\sqrt{3} + \sqrt{5} = \frac{p}{q}$ , ahol a tört tovább már nem egyszerűsíthető, azaz  $p, q \in \mathbb{Z}^+$  és  $p, q$  relatív prímek.

A  $q$ -val való beszorzás után négyzetre emelve, majd rendezve az egyenletet  $2\sqrt{15}q^2 = p^2 - 8q^2$ .

Ebből  $\sqrt{15} = \frac{p^2 - 8q^2}{2q^2}$ , amelynek a bal oldala irracionális, a jobb oldala racionális, ami ellentmondás.

## 2. A négyzetgyök alkalmazásai (23-24. oldal)

1.

- a) 0;    b) 0;    c) 70;    d) 2;    e)  $14 - 10\sqrt{3}$ .

2.

- a)  $7\sqrt{a^3} = 7a\sqrt{a}$ , ahol  $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ;  
 b)  $|b|\sqrt{c}(4c - 2 + c^3)$ , ahol  $b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ;  
 c)  $2|x^3|$ , ahol  $x \in \mathbb{R}$ .

3.

- a)  $3\sqrt{7}$ ;    b)  $\frac{\sqrt{57}}{3}$ ;    c)  $\frac{3\sqrt{13}}{2}$ ;    d)  $\frac{7}{\sqrt{3}}$ ;    e)  $(7 - \sqrt{40})\sqrt{\frac{7 + \sqrt{40}}{7 - \sqrt{40}}}$ .

4.

- a)  $4\sqrt{3}$ ;    b)  $\frac{4\sqrt{6}}{5}$ ;    c)  $\frac{15\sqrt{7}}{14}$ ;    d)  $\sqrt{6} - \sqrt{5}$ ;  
 e)  $\sqrt{30} + 5$ ;    f)  $2\sqrt{7} + 3\sqrt{3}$ ;    g)  $13 - 2\sqrt{42}$ ;    h)  $20\sqrt{6} - 49$ .

5.

- a) bal oldal;    b) jobb oldal;    c) jobb oldal.

6.

- a)  $48 - 6\sqrt{15}$ ;    b)  $-\frac{253}{3}$ .

7.

- a)  $\frac{1}{2\sqrt{x} + 3}$ , ahol  $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \setminus \left\{\frac{9}{4}\right\}$ ;  
 b)  $\frac{1}{1 - \sqrt{a}}$ , ahol  $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \setminus \{1\}$ ;  
 c)  $\frac{1}{2}$ , ahol  $y \in \mathbb{R}^+ \setminus \{25\}$ ;

d) Közös nevezőre hozás után: 
$$\frac{2(\sqrt{b}+2) - (\sqrt{b}-2) - 2\sqrt{b}}{(\sqrt{b}-2)(\sqrt{b}+2)} \cdot \frac{(\sqrt{b}+2)^2}{4\sqrt{b}-b}$$

felbontva a zárójeleket a számlálóban, összevonás után: 
$$\frac{-b+4\sqrt{b}}{\sqrt{b}-2} \cdot \frac{\sqrt{b}+2}{4\sqrt{b}-4} = \frac{\sqrt{b}+2}{\sqrt{b}-2},$$
  
ahol  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{4; 16\}$ .

8. Gyöktelenítsük az összeg tagjainak nevezőjét!

$$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{4-3} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(n+1)-n}$$

a nevezők értéke 1, így a kifejezés:

$$\sqrt{2}-\sqrt{1} + \sqrt{3}-\sqrt{2} + \sqrt{4}-\sqrt{3} + \dots + \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \sqrt{n+1}-1.$$

A kifejezés értéke akkor racionális, ha a négyzetgyök alatt négyzetszám áll. Mivel  $n < 2008$ , így az  $n+1$  lehetséges értékei: 1; 4; 9; 16; ... 1936 (=  $44^2$ ), azaz az  $n$  lehetséges értékei: 0; 3; 8; 15; ... 1935, de  $n$  pozitív, tehát csak 43-féle értéket vehet fel.

9. 
$$\frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1} \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{1})} + \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})} + \frac{1}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3} \cdot (\sqrt{4} + \sqrt{3})} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n} \cdot (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})} =$$
  

$$= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{1}} + \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{4}-\sqrt{3}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{3}} + \dots + \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} \cdot \sqrt{n}} =$$
, ahol minden tag felírható két tört különbségként:

$$= \left( \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots + \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

A végeredményben a második tag bármely  $n \in \mathbb{Z}^+$  esetén pozitív, így a kifejezés értéke kisebb, mint 1.

10. Felírva az állítást  $1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > \frac{99}{100}$ , rendezés után  $\frac{1}{100} > \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ , azaz  $\sqrt{n+1} > 100$ , tehát  $n+1 > 10000$ , ahonnan  $n \geq 9999$ .

### 3. A számok $n$ -edik gyöke (30-31. oldal)

1.

a) 2; b) -2; c)  $\frac{2}{3}$ ; d) -0,1; e) 10; f)  $\frac{4}{3}$ ; g) 0; h)  $-\frac{5}{3}$ .

2.

a)  $|a|$ ; b)  $|b|$ ; c)  $c$ ; d)  $d$ ; e)  $-e$ ; f)  $|-f| = |f|$ ; g)  $g^4$ ; h)  $h^6$ ; i)  $|i^3|$ ; j)  $|j^5|$ ; k)  $k^3$ .

3.

a) 2;    b) 3;    c) 3;    d) 5;    e) 2;    f) 3;    g) 2;

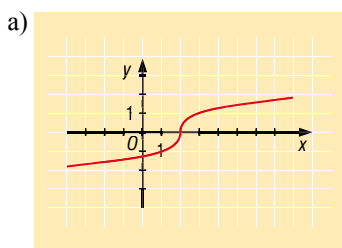
h) Felhasználva, hogy  $6 + \sqrt{20} = 6 + 2\sqrt{5}$ , valamint  $56 + 24\sqrt{5} = (6 + \sqrt{20})^2$ :

$$\sqrt[4]{\frac{(6 + \sqrt{20})^2 \cdot (6 - \sqrt{20})}{6 + \sqrt{20}}} = \sqrt[4]{36 - 20} = 2;$$

i)  $5^3 = 125$ ;    j)  $2^0 = 1$ ;    k) 2.

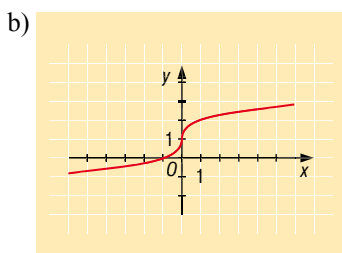
## 4. Az $n$ -edik gyökfüggvény, az $n$ -edik gyök alkalmazása (36. oldal)

1.



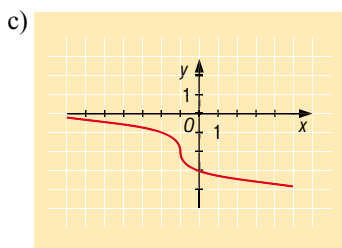
$D_f = \mathbb{R}$ ;  
 $R_f = \mathbb{R}$ ;  
 zérushely:  $x = 2$ ;  
 monotonitási viszonyok: szigorúan monoton növekvő;  
 szélsőértéke: nincs;  
 paritása: nem páros, nem páratlan.

4.1. a) ábra



$D_f = \mathbb{R}$ ;  
 $R_f = \mathbb{R}$ ;  
 zérushely:  $x = -1$ ;  
 menete: szigorúan monoton növekvő;  
 szélsőértéke: nincs;  
 paritása: nem páros, nem páratlan.

4.1. b) ábra



$D_f = \mathbb{R}$ ;  
 $R_f = \mathbb{R}$ ;  
 zérushely:  $x = -9$ ;  
 menete: szigorúan monoton csökkenő;  
 szélsőértéke: nincs;  
 paritása: nem páros, nem páratlan.

4.1. c) ábra

2.

a) 2;    b) -20;    c) 21;    d) 25;    e)  $6 \cdot |a| \cdot \sqrt[8]{b}$ .

3.

a) jobb oldal;      b) jobb oldal.

4.

a)  $\sqrt[6]{8}$ ;      b)  $\sqrt[12]{b^{11}}$ ;      c)  $\sqrt[30]{c^{28}}$ ;      d)  $\sqrt[4]{12}$ ;      e)  $\sqrt[6]{675}$ ;      f)  $\sqrt[20]{2^{19}}$ ;      g)  $\sqrt[15]{x}$ .

5.

a) jobb oldal;      b) bal oldal;      c) jobb oldal.

6.

a)  $\frac{6\sqrt[3]{25}}{5}$ ;      b)  $\frac{8\sqrt[4]{3}}{3}$ ;      c)  $5\sqrt[5]{27}$ ;d) Felhasználva az  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab - b^2)$  azonosságot:

$$\frac{\cancel{3}(\sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4})}{\cancel{5} \cdot \cancel{2}} = \sqrt[3]{25} + \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{4};$$

e) Felhasználva az  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab - b^2)$  azonosságot:

$$\frac{\cancel{23}(\sqrt[3]{225} - 2\sqrt[3]{15} + 4)}{\cancel{15} \cdot \cancel{8}} = \sqrt[3]{225} - 2\sqrt[3]{15} + 4.$$

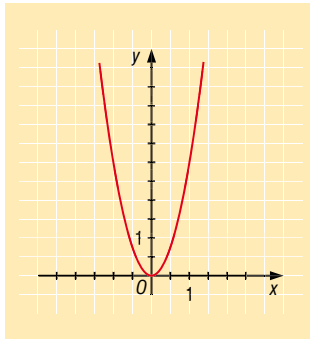
## 1. Másodfokú függvény, másodfokú egyenlet (42-43. oldal)

1.

- a)  $(x-4)^2 + 3$ ;      b)  $(x+9)^2 - 18$ ;      c)  $\left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{57}{4}$ ;      d)  $\left(x - \frac{13}{2}\right)^2 - \frac{45}{4}$ ;  
 e)  $2(x-2)^2 - 11$ ;      f)  $-2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{19}{2}$ ;      g)  $3(x-3)^2 - 28$ ;      h)  $\frac{1}{2}(x+5)^2 + \frac{23}{2}$ .

2.

a)



$$D_f = \mathbb{R};$$

$$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$$

zérushelye:  $x = 0$ ;

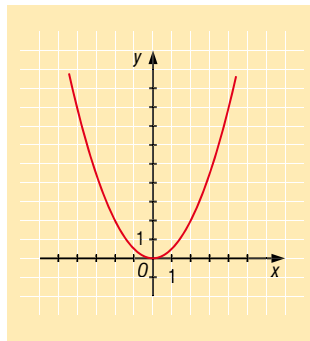
menete: ha  $x \leq 0$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x = 0$ , akkor szigorúan monoton növekvő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = 0$  helyen  $f(x) = 0$  értékkel, maximuma nincs;

paritása: páros.

1.2. a) ábra

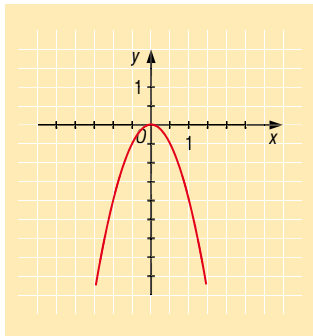
b)



Tulajdonságai megegyeznek az előző függvényével.

1.2. b) ábra

c)



1.2. c) ábra

$D_f = \mathbb{R};$

$R_f = \mathbb{R}^- \cup \{0\};$

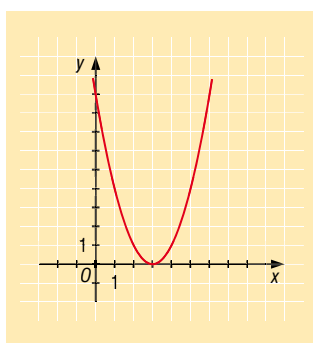
zérushelye:  $x = 0;$

menete: ha  $x \leq 0$ , akkor szigorúan monoton növekvő, ha  $x > 0$ , akkor szigorúan monoton csökkenő;

szélsőértéke: maximuma van  $x = 0$  helyen  $f(x) = 0$  értékkel, minimuma nincs;

paritása: páros.

d)



1.2. d) ábra

$D_f = \mathbb{R};$

$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

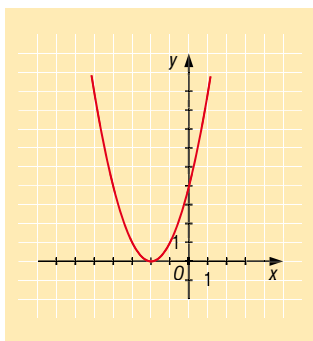
zérushelye:  $x = 3;$

menete: ha  $x \leq 3$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq 3$ , akkor szigorúan monoton növekvő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = 3$  helyen  $f(x) = 0$  értékkel, maximuma nincs;

paritása: nem páros, nem páratlan.

e)



1.2. e) ábra

$D_f = \mathbb{R};$

$R_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

zérushelye:  $x = -2;$

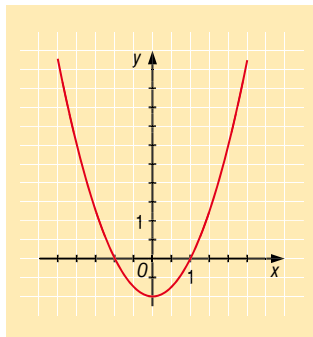
menete: ha  $x \leq -2$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq -2$ , akkor szigorúan monoton növekvő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = -2$  helyen  $f(x) = 0$  értékkel, maximuma nincs;

paritása: nem páros, nem páratlan.



f)



$$D_f = \mathbb{R};$$

$$R_f = [-1; \infty[;$$

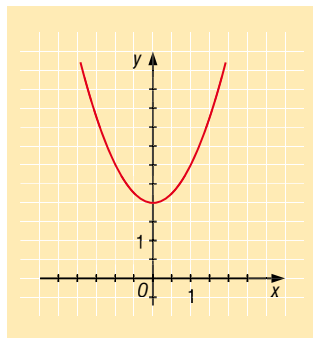
$$\text{zérushelyei: } \{-1; 1\};$$

menete: ha  $x \leq 0$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq 0$ , akkor szigorúan monoton növekvő; szélsőértéke: minimuma van  $x = 0$  helyen  $f(x) = -1$  értékkel, maximuma nincs;

paritása: páros.

1.2. f) ábra

g)



$$D_f = \mathbb{R};$$

$$R_f = [2; \infty[;$$

zérushelye: nincs;

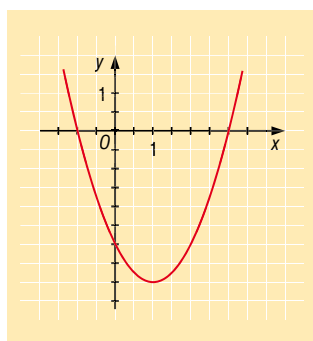
menete: ha  $x \leq 0$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq 0$ , akkor szigorúan monoton növekvő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = 0$  helyen  $f(x) = 2$  értékkel, maximuma nincs;

paritása: páros.

1.2. g) ábra

h)



$$D_f = \mathbb{R}; R_f = [-4; \infty[;$$

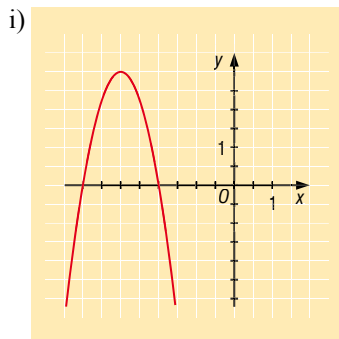
$$\text{zérushelyei: } \{-1; 3\};$$

menete: ha  $x \leq 1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq 1$ , akkor szigorúan monoton növekvő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = 1$  helyen  $f(x) = -4$  értékkel, maximuma nincs;

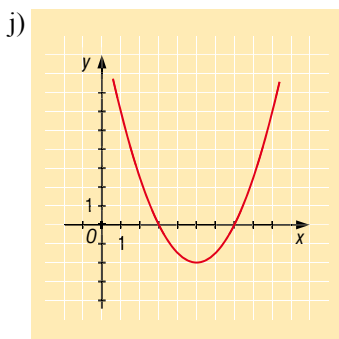
paritása: nem páros, nem páratlan.

1.2. h) ábra



$D_f = \mathbb{R}; R_f = ]-\infty; 3];$   
 zérushelyei:  $\{-4; -2\};$   
 menete: ha  $x \leq -3$ , akkor szigorúan monoton növe, ha  $x \geq -3$ , akkor szigorúan monoton csökkenő;  
 szélsőértéke: maximuma van  $x = -3$  helyen  $f(x) = 3$  értékkel, minimuma nincs;  
 paritása: nem páros, nem páratlan.

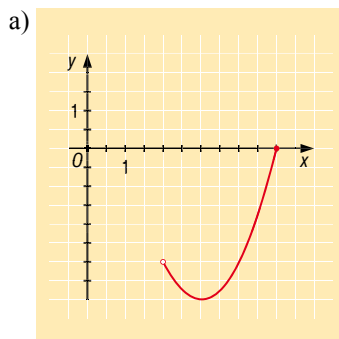
1.2. i) ábra



$D_f = \mathbb{R}; R_f = [-2; \infty[;$   
 zérushelyei:  $\{3; 7\};$   
 menete: ha  $x \leq 5$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq 5$ , akkor szigorúan monoton növe;  
 szélsőértéke: minimuma van  $x = 5$  helyen  $f(x) = -2$  értékkel, maximuma nincs;  
 paritása: nem páros, nem páratlan.

1.2. j) ábra

3.

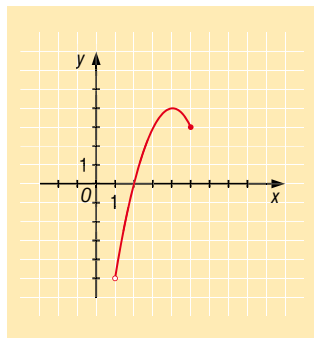


$R_f = [-4; 0];$   
 zérushelye:  $x = 5;$   
 menete: ha  $-4 < x \leq 3$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $5 \geq x \geq 3$ , akkor szigorúan monoton növe;  
 szélsőértéke: minimuma van  $x = 3$  helyen  $f(x) = -4$  értékkel, maximuma van  $x = 5$  helyen  $f(x) = 0;$   
 paritása: nem páros, nem páratlan.

1.3. a) ábra



b)



1.3. b) ábra

$$R_f = ]-5; 4];$$

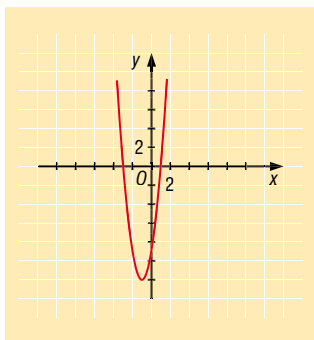
zérushelye:  $x = 2$ ;

menete: ha  $-5 < x \leq 4$ , akkor szigorúan monoton növő, ha  $4 \geq x \geq 3$ , akkor szigorúan monoton csökkenő;

szélsőértéke: minimuma nincs, maximuma van  $x = 4$  helyen  $f(x) = 4$ ;

paritása: nem páros, nem páratlan.

c)



1.3. c) ábra

$$R_f = [-12; \infty[;$$

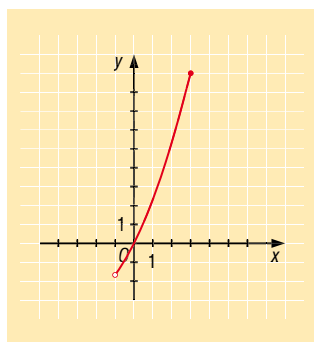
zérushelyei:  $\{-3; 1\}$ ;

menete: ha  $x \leq -1$ , akkor szigorúan monoton csökkenő, ha  $x \geq -1$ , akkor szigorúan monoton növő;

szélsőértéke: minimuma van  $x = -1$  helyen  $f(x) = -12$ , maximuma nincs;

paritása: nem páros, nem páratlan.

d)



1.3. d) ábra

$$R_f = \left] -\frac{5}{3}; 9 \right[;$$

zérushelye:  $x = 0$ ;

menete: szigorúan monoton növő;

szélsőértéke: minimuma nincs, maximuma van  $x = 3$  helyen  $f(x) = 9$ ;

paritása: nem páros, nem páratlan.

4.

a) minimum:  $f(5) = -3$ , maximum:  $f(8) = 6$ ;

b) minimum: nincs, maximum:  $f(10) = 5$ ;

c) minimum:  $f(-5) = 8$ , maximum: nincs;

d) minimum:  $f(4) = -8$ , maximum: nincs.

5.

- a)  $x = -2$ ;    b)  $x_1 = 6, x_2 = 8$ ;    c)  $x_1 = -5, x_2 = 3$ ;    d)  $x_1 = -6, x_2 = 5$ ;  
e)  $x_1 = -6, x_2 = -3$ ;    f)  $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = 5$ ;    g)  $x_1 = -7, x_2 = \frac{5}{3}$ .

## 2. A másodfokú egyenlet megoldóképlete (50. oldal)

1.

- a)  $x_1 = -5, x_2 = 7$ ;    b)  $x_1 = -\frac{1}{5}, x_2 = 2$ ;    c)  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{4}$ ;  
d)  $x_1 = \frac{2 + \sqrt{14}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{14}}{2}$ ;    e)  $x = -\frac{15}{2}$ ;  
f) nincs megoldás;    g) nincs megoldás.

2.

- a)  $x_1 = -4, x_2 = 3$ ;    b)  $x_1 = 1, x_2 = 3$ ;    c)  $x_1 = +\sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}$ ;    d)  $x_1 = -13, x_2 = 2$ .

3.

- a)  $x_1 = -3, x_2 = 1$ ;    b)  $x_1 = 1, x_2 = 9$ ;    c)  $x = \frac{3}{2}$ ;    d)  $x = 10$ .

4.

- a)  $a < \frac{49}{5}$ ;    b)  $b < -12$  vagy  $12 < b$ ;    c)  $-5 < c$ .

5.

- a)  $a = -\frac{63}{8}$ ;    b) nincs ilyen  $b$ ;    c)  $c = \frac{225}{4}$ .

6.

- a)  $a < -\frac{7}{12}$ ;    b)  $-30 < b < 30$ ;    c)  $c < -\frac{529}{12}$ .

## 3. Másodfokú egyenletre vezető szöveges feladatok (55-56. oldal)

1. A keresett tört a  $\frac{7}{3}$ .

2. A keret szélessége 2,5 cm, a kép oldalai 15 cm és 20 cm hosszúak.

3. 25 fő megy kirándulni, fejenként 8400 Ft-ot kell befizetniük.

4. A kosztüm árát először 10%-kal emeltük.
5. A keresett szám a 27 vagy a 72.
6. A konvex sokszög 23 oldalú.
7.  $T = 627 \text{ cm}^2$ .
8. A gyorsabb autó 3 km-re, a lassabb 2,4 km-re volt.
9. A teherautó sebessége  $75 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , menetideje 2,4 h; a személygépkocsi sebessége  $100 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ , menetideje 1,8 h.
10. Külön-külön 16 és 20 óra alatt töltik meg a medencét.

## 4. A gyöktényezőzős alak. Gyökök és együtthatók közötti összefüggés (61-62. oldal)

1.
 

a) $(x-11)(x+3)$ ;	b) $(x-8)(x+7)$ ;	c) $(x+12)(x+5)$ ;
d) $(x+11)(2x-1)$ ;	e) $(4x-3)(2x-1)$ ;	f) $(2x+3)(5x+7)$ .
2.
 

a) $\frac{x+5}{x+8} \in \mathbb{R} \setminus \{-8; 11\}$ ;	b) $\frac{x+10}{x+12} \in \mathbb{R} \setminus \{-3; -12\}$ ;
c) $\frac{3x+4}{x+2} \in \mathbb{R} \setminus \left\{-2; -\frac{5}{2}\right\}$ ;	d) $\frac{3x-1}{x+5} \in \mathbb{R} \setminus \left\{-5; -\frac{7}{4}\right\}$ .
3.
 

a) $x^2+3x-10$ ;	b) $x^2-9x+18$ ;	c) $x^2+18x+77$ ;	d) $3x^2-17x+10$ ;	e) $12x^2+53x+56$ .
------------------	------------------	-------------------	--------------------	---------------------

4. Az egyenlet diszkriminánsa pozitív, így vannak megoldások.

$$\text{a) } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{b}{c} = -\frac{7}{5};$$

$$\text{b) } x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = \frac{69}{4};$$

$$\text{c) } \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{x_1^2 + x_2^2}{x_1 x_2} = \frac{\frac{69}{4}}{-\frac{5}{2}} = -\frac{69}{10};$$

d) Legyen  $x_1 > x_2$ !

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} \cdot (x_1 + x_2) = \frac{7\sqrt{89}}{4};$$

e) Legyen  $x_1 > x_2$ !

$$x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2} \cdot (x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2) = \frac{59\sqrt{89}}{8}.$$

5.  $6x^2 + 4x - 55 + 5\sqrt{109} = 0.$

6. A 4.) feladat b) pontja alapján:

(1)  $b^2 - 4ac \geq 0$  és (2)  $\frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} = 5$  feltételeknek kell teljesülnie.

(1)  $\Rightarrow p \leq \frac{9}{4}$  és (2)  $\Rightarrow p = 2$ , azaz  $p = 2$ .

7.  $x_1x_2^2 + x_2x_1^2 = x_1x_2(x_1 + x_2)$ , azaz  $-\frac{bc}{a^2} = 8$ , ahonnan  $p = -10$  (visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ekkor létezik az egyenletnek megoldása).

8.

a) A szükséges és elegendő feltétel, hogy teljesüljenek az alábbi állítások:

(1)  $b^2 - 4ac \geq 0$  és (2)  $\frac{c}{a} > 0$  és (3)  $-\frac{b}{a} > 0$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \Rightarrow p \leq -8 \text{ vagy } 8 \leq p \\ \text{és} \\ (2) \Rightarrow -10 < p \\ \text{és} \\ (3) \Rightarrow p < -4 \end{array} \right\} \Rightarrow -10 < p \leq -8.$$

b) A szükséges és elegendő feltétel, hogy teljesüljenek az alábbi állítások:

(1)  $b^2 - 4ac \geq 0$  és (2)  $\frac{c}{a} > 0$  és (3)  $-\frac{b}{a} < 0$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \Rightarrow p \leq -8 \text{ vagy } 8 \leq p \\ \text{és} \\ (2) \Rightarrow -10 < p \\ \text{és} \\ (3) \Rightarrow -4 < p \end{array} \right\} \Rightarrow 8 \leq p.$$



## 5. Másodfokúra visszavezethető magasabb fokú egyenletek (67. oldal)

1.

- a)  $x_1 = +2, x_2 = -2, x_3 = +9, x_4 = -9;$
- b)  $x_1 = +\sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = +5, x_4 = -5;$
- c)  $x_1 = -1, x_2 = 3;$
- d)  $x_1 = \sqrt[3]{-5}, x_2 = 2;$
- e)  $x_1 = +2, x_2 = -2;$
- f)  $x_1 = \sqrt[5]{-5}, x_2 = -2.$

2.

- a)  $x_1 = -6, x_2 = 0;$
- b)  $x_1 = -3, x_2 = 1;$
- c) Felbontva a zárójleket  $(x^2 + 4x - 2)^2 + x^2 + 4x - 5 = 9.$

Új ismeretlen bevezetésével ( $y := x^2 + 4x - 2$ ) másodfokú egyenletet kapunk:  
 $y^2 + y - 3 = 9$ , melynek gyökei  $y_1 = -4, y_2 = 3.$

Visszahelyettesítve:

$$x^2 + 4x - 2 = -4 \text{ és } x^2 + 4x - 2 = 3.$$

Ezen egyenletek megoldásai:  $x_1 = -2 + \sqrt{2}, x_2 = -2 - \sqrt{2}$ , illetve  $x_3 = -5, x_4 = 1.$

- d)  $y := x^2 + 5x - 1$  bevezetésével:

$$(y + 3) \cdot y - 4 = 0, \text{ melynek gyökei } y_1 = -4, y_2 = 1, \text{ így}$$

$$x^2 + 5x - 1 = -4 \text{ és } x^2 + 5x - 1 = 1, \text{ melyek megoldásai } x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}, \text{ illetve } x_{3,4} = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{2}.$$

- e) Az előzőekhez hasonlóan  $y := x^2 + 6x + 7$  bevezetésével  $y_1 = 2, y_2 = 3$  adódik, ahonnan visszahelyettesítés után  $x_1 = -5, x_2 = -1, x_3 = -3 + \sqrt{5}, x_4 = -3 - \sqrt{5}.$

- f)  $y := x^2 - 6x \Rightarrow 1 - \frac{y}{1-y} = \frac{5}{y+5} \quad y_1 \neq -5, y_2 \neq 1 \Rightarrow (1-y)(y+5) - y(y+5) = 5(1-y),$

melynek gyökei  $y_1 = -2, y_2 = 0$  jó megoldások. Visszahelyettesítés után az eredeti egyenlet megoldásai:

$$x_1 = 0, x_2 = 6, x_3 = 3 + \sqrt{7}, x_4 = 3 - \sqrt{7}.$$

- g) A két szélső, illetve a két középső zárójel összeszorozása után  $(x^2 + 5x - 6)(x^2 + 5x + 6) - 160 = 0$ , melyből  $y := x^2 + 5x - 6$  helyettesítéssel végül csak két megoldást kapunk:  $x_1 = -7, x_2 = 2.$

3.

- a)  $x^2$ -tel való leosztás ( $x = 0$  nem megoldás!) és kiemelés után:  $2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 11 = 0.$

Vezessünk be egy új ismeretlent!  $y := x + \frac{1}{x} \Rightarrow 2(y^2 - 2) - y - 11 = 0$ , melynek a megoldásai:

$$y_1 = -\frac{5}{2}, y_2 = 3 \Rightarrow -\frac{5}{2} = x + \frac{1}{x} \text{ és } 3 = x + \frac{1}{x}.$$

Beszorozva  $x$ -szel az egyenleteket, a megoldások:  $x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, x_4 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2};$

b) Az előzőhöz hasonlóan adódnak a gyökök:  $x_1 = -3, x_2 = -\frac{1}{3}$ ;

c)  $x_1 = -2, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = -3, x_4 = \frac{1}{3}$ .

## 6. Másodfokú egyenlőtlenségek (73. oldal)

1.

- a)  $x < -2$  vagy  $3 < x$ ;      b)  $-4 \leq x \leq 1$ ;      c)  $x \leq -3$  vagy  $\frac{3}{2} \leq x$ ;  
 d)  $-\frac{3}{4} < x < 2$ ;      e)  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ ;      f)  $x = \frac{5}{2}$ ;  
 g) nincs megoldás;      h)  $x \in \mathbb{R}$ ;      i)  $x = \frac{3}{4}$ .

2.

- a)  $x \geq -\frac{5}{14}$ ;      b) nincs megoldás;      c)  $x > -\frac{19}{18}$ .

3.

- a)  $\frac{4}{3} < x < 6$  vagy  $8 < x$ ;      b)  $x < 1$  vagy  $\frac{3}{2} < x < 5$ ;      c)  $x \in \left[-\frac{7}{2}; 3\right] \setminus \{1\}$ ;  
 d)  $-5 < x \leq 2$  vagy  $3 < x \leq 5$ ;      e)  $-2 < x < \frac{5}{3}$ ;  
 f)  $x < -2 - \sqrt{63}$  vagy  $5 < x < -2 + \sqrt{63}$  vagy  $6 < x$ ;  
 g)  $x < 10 - \sqrt{110}$  vagy  $-\frac{2}{5} < x < 2$  vagy  $10 + \sqrt{110} < x$ .

4.

a) Két különböző megoldást akkor kapunk, ha a diszkrimináns pozitív, azaz  $(p-5)^2 - 4(p-2) > 0$ , ahonnan  $p < 3$  vagy  $11 < p$ , és  $p-2 \neq 0$ , azaz  $p \neq 2$  feltételeknek kell teljesülni, mert különben elsőfokú egyenletet kapunk, melynek nem lehet két különböző megoldása.

b) Az előző feladathoz hasonlóan a  $p^2 + 22p + 85 > 0$  egyenlőtlenséget kapjuk, melyből  $p < -17$  vagy  $-5 < p$ .

5.

a) A grafikus előjelvizsgálatra gondolva az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet minden  $x$ -re, ha a bal oldali kifejezés grafikonja egy lefelé nyitott parabola, melynek nincsenek zérushelyei, azaz  $m-1 < 0$  és  $D < 0$ . A két feltételből kapott megoldáshalmaz metszete:  $m < -\frac{41}{40}$ .

b) A grafikus előjelvizsgálatra gondolva az egyenlőtlenség csak akkor teljesülhet minden  $x$ -re, ha a

bal oldali kifejezés grafikonja egy felfelé nyitott parabola, melynek nincsenek zérushelyei, azaz  $m+3 < 0$  és  $D < 0$ . A két feltételből kapott megoldáshalmaz metszete:  $1 < m < 6$ .

6. A fentiekhez hasonlóan a  $q-4 < 0$  és a  $D \leq 0$  feltételeknek kell teljesülniük, melyekből  $q \leq -\frac{137}{56}$  adódik.

## 7. Négyzetgyökös egyenletek, egyenlőtlenségek (79-80. oldal)

1.

- a)  $x = 26$ ;      b)  $x = -\frac{76}{3}$ ;      c)  $x = -28$ ;      d)  $x = 1$ ;  
 e)  $x = -6$ ;      f)  $x = -2$ ;      g)  $x_1 = -\frac{5}{2}, x_2 = 1$ ;      h)  $x = 8$ .

2.

- a)  $x = 1$ ;      b)  $x = 9$ ;      c)  $x = \frac{1}{9}$ ;      d)  $x = \frac{1}{9}$ ;      e)  $x = 25$ .

3.

- a)  $x_1 = -7, x_2 = 17$ ;      b)  $x_1 = -15, x_2 = -9$ ;      c)  $x_1 = -\frac{16}{3}, x_2 = \frac{26}{3}$ ;      d)  $x = 8$ .

4.

- a)  $x = 1$ ;      b)  $x = 7$ ;      c)  $x = -\frac{3}{4}$ ;      d)  $x = 4$ ;      e)  $x = -\frac{1}{3}$ .

5.

- a)  $9 \leq x$ ;      b)  $-\frac{2}{7} \leq x \leq 1$ ;      c)  $x < -\frac{1}{3}$ ;      d)  $x \leq \frac{4}{5}$ ;      e)  $x < 4$ ;  
 f)  $\frac{3}{2} < x$ ;      g)  $2 < x$  vagy  $x = -\frac{5}{7}$ ;      h)  $-6 < x$  és  $x \neq 5$ ;      i)  $x = -1$ .

6.

a) Négyzetre emelve az egyenlet két oldalát:

$$x+5+x-3+2\sqrt{x^2+2x-15}=16, \text{ átrendezés és osztás után:}$$

$\sqrt{x^2+2x-15}=7-x$ , újabb négyzetre emeléssel  $x^2+2x-15=49-14x+x^2$ , ahonnan  $x=4$  (ellenőrizve jó megoldás).

b) Az előzőhöz hasonlóan, kétszeri négyzetre emeléssel a  $9x^2-26x-95=0$  egyenletet kapjuk, melyből csak az  $x=5$  a jó megoldás.

c) Négyzetre emelve a két oldalt, majd rendezve az egyenletet:

$$2\sqrt{3x^2+7x-6}=2x+12, \text{ osztás és újabb négyzetre emelés után:}$$

$$2x^2-5x-42=0, \text{ melynek a jó megoldása csak az } x=6.$$

- d)  $x_1 = \frac{207}{41}, x_2 = 7$ ;

e)  $x_1 = -4, x_2 = 1;$

f)  $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 3.$

7.

a) Alaphalmaz:  $x \geq -\frac{13}{3}.$

– Ha  $x < -3$ , akkor az egyenlőtlenség minden  $x$ -re teljesül, amit az alaphalmaz és a vizsgált tartomány megenged, azaz  $-\frac{13}{3} \leq x < -3.$

– Ha  $x \geq -3$ , akkor a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás (mert mindkét oldal értéke nemnegatív):

$3x + 13 > x^2 + 6x + 9$ , melynek az alaphalmazba és a vizsgált tartományba is beleeső megoldásai:  $-3 \leq x < 1.$

Összefoglalva a megoldásokat (a részmegoldások uniója):  $-\frac{13}{3} \leq x < 1.$

b) Csak olyan  $x$ -ekre lehet megoldása az egyenlőtlenségnek, melyekre a bal oldal értéke nemnegatív, azaz ha  $x \leq 5$ , továbbá a jobb oldal is értelmezve van, azaz  $\frac{7}{2} \leq x$ . Négyzetre emelve (ekvivalens!) és rendezve az egyenlőtlenséget:  $x^2 - 12x + 32 \geq 0$ , melynek a mindkét feltételnek eleget tevő megoldásai  $\frac{7}{2} \leq x \leq 4.$

c) Az előzőkhöz hasonló gondolatmenettel  $-2 < x$  adódik.

d)  $x \leq 4;$

e)  $x < -\frac{2}{5}.$

## 8. Számított középértékek (86-87. oldal)

1.

a)  $A = 17, G = 15;$

b)  $A = 25, G = 24;$

c)  $A = 31, G = \sqrt{861};$

d)  $A = \frac{61}{30}, G = 2;$

e)  $A = \frac{97}{108}, G = \frac{2}{3}.$

2. 19, 27.

3. 54.

4. Az átfogó hossza  $12 \cdot \sqrt{2} (\approx 16,97)$  cm.5. Az átfogó hossza  $13 \cdot \sqrt{2} (\approx 18,38)$  cm.

6. Jelöljük  $x$ -szel és  $(36-x)$ -szel a háromszög befogóit! A háromszög területe:  $T(x) = \frac{x(36-x)}{2}$ , melynek maximális értéke a számtani és mértani közép közti összefüggés alapján:

$$\left( \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2} \Rightarrow a \cdot b \leq \left( \frac{a+b}{2} \right)^2 \right)$$

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{x+(36-x)}{2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 18^2 = 162, \text{ és a } T(x) \text{ függvény akkor veszi fel a maximumát, ha } x = 36-x, \text{ azaz a háromszög egyenlő szárú, melynek befogói } 18 \text{ cm hosszúságúak.}$$

7.  $a$ -val és  $b$ -vel jelölve a befogókat a háromszög területének felírásából  $ab = 36$ . A háromszög befogóinak összegét  $(a+b)$  alulról becsüljük az  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{a \cdot b}$  egyenlőtlenség alapján:

$$a+b \geq 2\sqrt{a \cdot b} = 2\sqrt{36} = 12, \text{ ahol az egyenlőség } a = b \text{ esetén teljesül, azaz a } 6 \text{ cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszögben legkisebb a befogók összege.}$$

8.  $\frac{a+\frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} \Leftrightarrow a + \frac{1}{a} \geq 2.$

9.  $f(x) = \underbrace{x^2}_{\geq 2} + 2 \geq 4$ , egyenlőség  $x^2 = \frac{1}{x^2}$  esetén teljesül, azaz a minimum helye  $x_1 = +1, x_2 = 1$ , értéke  $f(x) = 4$ .

10.  $Q(9;25) = \sqrt{353}$  és  $H(9;25) = \frac{225}{17}$ ;

$$Q(32;18) = \sqrt{674} \text{ és } H(32;18) = \frac{576}{25};$$

$$Q(21;41) = \sqrt{1061} \text{ és } H(21;41) = \frac{861}{31};$$

$$Q\left(\frac{12}{5}; \frac{5}{3}\right) = \sqrt{\frac{1921}{450}} \text{ és } H\left(\frac{12}{5}; \frac{5}{3}\right) = \frac{120}{61};$$

$$Q\left(\frac{8}{27}; \frac{3}{2}\right) = \sqrt{\frac{6817}{5832}} \text{ és } H\left(\frac{8}{27}; \frac{3}{2}\right) = \frac{48}{97}.$$

11. A sebességek átlaga:  $A(70;90) = 80$ .

Az átlagsebesség kiszámítása:

$$\text{átlagsebesség} = \frac{\text{összes út}}{\text{összes idő}} = \frac{2 \cdot s}{\frac{s}{70} + \frac{s}{90}} = \frac{2}{\frac{1}{70} + \frac{1}{90}} = H(70;90) = 78,75.$$

Az eltérés:  $A(70;90) - H(70;90) = 1,25 \frac{\text{km}}{\text{h}}.$

12.

$$a) a \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \Leftrightarrow a(a+b) \leq 2ab \Leftrightarrow a^2 - ab \leq 0 \Leftrightarrow \underbrace{a}_{\text{poz.}} \cdot \underbrace{(a-b)}_{\text{neg.}} \leq 0;$$

$$b) \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2ab \leq \sqrt{ab}(a+b) \Leftrightarrow 4a^2b^2 \leq ab(a^2 + 2ab + b^2) \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2;$$

$$c) \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Leftrightarrow 2(a^2 + 2ab + b^2) \leq 4(a^2 + b^2) \Leftrightarrow 0 \leq (a-b)^2;$$

$$d) \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq b \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 2b^2 \Leftrightarrow a^2 \leq b^2.$$

Egyenlőség minden esetben akkor és csak akkor áll fenn, ha  $a = b$ .

13. A háromszög befogóit  $a$ -val, illetve  $(22 - a)$ -val jelölve az átfogó hossza  $\sqrt{a^2 + (22 - a)^2}$ , ami a négyzetes és a számtani közép közti reláció alapján alulról becsülhető:

$\sqrt{\frac{a^2 + (22 - a)^2}{2}} \geq \frac{a + (22 - a)}{2}$ , azaz  $\sqrt{a^2 + (22 - a)^2} \geq 11\sqrt{2}$ , ahol az egyenlőség  $a = 22 - a$  esetén teljesül, tehát az  $a = 11$  cm befogójú, egyenlő szárú derékszögű háromszög átfogója a legrövidebb.

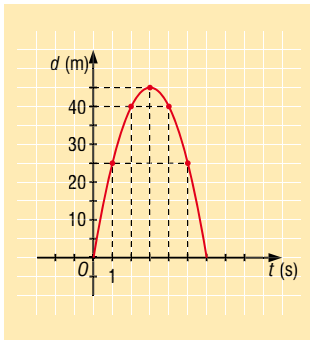
## 9. Szélsőérték-feladatok (91-92. oldal)

1.

a)  $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  és  $b = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ;

b)  $t = 6$  s múlva;

c)



9.1. c) ábra

d) 3 s-nál 45 m magasan.

2.

a)  $T : [0; 20] \rightarrow \mathbb{R}; T(a) = 40a - 2a^2;$

b)  $T : [0; 40] \rightarrow \mathbb{R}; T(b) = 20b - \frac{b^2}{2};$

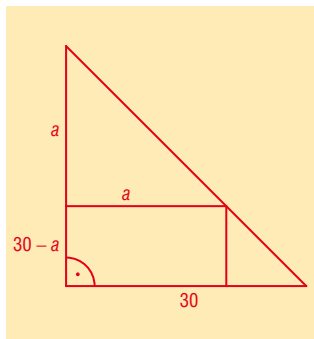
c)  $T_{\max} = 200 \text{ m}^2.$

3. Ha  $a$ -val és  $b$ -vel jelöljük a füves terület oldalait, akkor a park oldalainak hossza a burkolattal együtt  $a + 4$  és  $b + 4$ . A burkolat területe  $a$ -val és  $b$ -vel kifejezve:

$$(a + 4)(b + 4) - ab = 400, \text{ ahonnan } a + b = 96 \Rightarrow T_{\text{füves}} = a(96 - a).$$

A számtani és mértani közepek közti reláció alapján:  $T_{\text{füves}} \leq \left( \frac{a + (96 - a)}{2} \right)^2 = 48^2$ , a terület akkor maximális, ha  $a = 96 - a$ , azaz a füves terület  $48 \text{ m} \times 48 \text{ m}$ -es.

4.



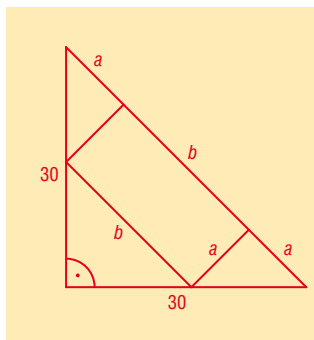
9.4. ábra

$$T_{\text{hulladék}} = \frac{30^2}{2} - a(30 - a) = \dots = (a - 15)^2 + 225 = \min. \Rightarrow a = 15 \text{ cm.}$$

A minimális hulladék:  $T_{\min} = 225 \text{ cm}^2.$

(Másik megoldás: a kivonandót felülről becsülhetjük a számtani és mértani közép vonatkozó egyenlőtlenség segítségével...)

5.



9.5. ábra

A „leeső” háromszögek egyikének befogója  $a$ , másikának  $\frac{b}{\sqrt{2}}$ , ami kifejezhető  $a$ -val:

$$\frac{b}{\sqrt{2}} = 30 - a\sqrt{2}.$$

$$T_{\text{hulladék}} = 2 \cdot \frac{a^2}{2} + \frac{(30 - a\sqrt{2})^2}{2} = 2a^2 - 30\sqrt{2} \cdot a + 450 = \dots = 2 \left( a - \frac{15}{\sqrt{2}} \right)^2 + 225 = \min.$$

$$\Rightarrow a = \frac{15}{\sqrt{2}} \text{ cm} = \frac{15\sqrt{2}}{2} \text{ cm}.$$

A minimális hulladék:  $T_{\min} = 225 \text{ cm}^2$ , azaz a két esetben ugyanannyi hulladék keletkezett.

6.  $a$ -val és  $(20 - a)$ -val jelölve a szakasz két darabjának hosszát a rájuk emelt négyzetek területösszege:

$$T_{\text{össz}}(a) = a^2 + (20 - a)^2 \geq \frac{(a + (20 - a))^2}{2} \Rightarrow T_{\min} = 200 \text{ cm}^2, \text{ ha } a = 10 \text{ cm}.$$

7. Az előző jelölésekkel:

$$T_{\text{össz}}(a) = T_{\text{szab.}\Delta} + T_{\text{szab.hatszög}} = \frac{(20 - a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} + 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dots = \frac{7\sqrt{3}}{4} \left( a - \frac{20}{7} \right)^2 + \frac{600\sqrt{3}}{7},$$

ahonnan  $a = \frac{20}{7}$  esetén lesz a területösszeg minimális, azaz a szakasz két részének hossza  $\frac{20}{7}$  cm és  $\frac{120}{7}$  cm.

8. A gyökök létezésének feltétele:  $(3 - p)^2 - 4 \cdot (p + 3) \geq 0$ . A másodfokú egyenlőtlenségnek a megoldásai:

$$p \leq 5 - \sqrt{28} \text{ vagy } 5 + \sqrt{28} \leq p.$$

A gyökök négyzetösszege:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left( -\frac{b}{a} \right)^2 - 2 \cdot \frac{c}{a} = (3 - p)^2 - 2 \cdot (p + 3) = \dots = (p - 4)^2 - 13, \text{ mely kife-}$$

jezés  $p = 4$ -nél venné fel a minimumát, de a fenti feltétel szerint a gyökök négyzetösszege csak az  $5 - \sqrt{28}$  ( $\approx -0,29$ )-nál kisebb, vagy a  $5 + \sqrt{28}$  ( $\approx 10,29$ )-nál nagyobb  $p$  értékek esetén értelmezett. Előbbi tartományon a négyzetösszeg függvény szigorúan monoton csökkenő, utóbbin szigorúan monoton növekvő  $\Rightarrow$  minimumát  $5 - \sqrt{28}$  vagy  $5 + \sqrt{28}$  helyen veszi fel. Például behelyettesítéssel eldönthető, hogy  $p = 5 - \sqrt{28}$  esetén lesz a gyökök négyzetösszege minimális.

## 10. Másodfokú egyenletrendszerek (96. oldal)

1.

a)  $x = 2$  és  $y = 15$ ;

b)  $x_1 = 18$  és  $y_1 = 35$  vagy  $x_2 = -18$  és  $y_2 = -35$ ;

c)  $x_1 = 12$  és  $y_1 = 3$  vagy  $x_2 = -12$  és  $y_2 = -3$ .

2. A keresett tört a  $\frac{12}{7}$ .

3. A rombusz átlói 48 és 20 cm hosszúak.

4.

a)  $x_1 = -1,6$  és  $y_1 = 4,2$  vagy  $x_2 = 2$  és  $y_2 = 3$ ;

b)  $x_1 = -1$  és  $y_1 = 5$  vagy  $x_2 = -\frac{60}{17}$  és  $y_2 = -\frac{87}{17}$ ;

c)  $x_1 = \frac{25+6\sqrt{190}}{22}$  és  $y_1 = \frac{-21+2\sqrt{190}}{11}$  vagy  $x_2 = \frac{25-6\sqrt{190}}{22}$  és  $y_2 = \frac{-21-2\sqrt{190}}{11}$ .

5.

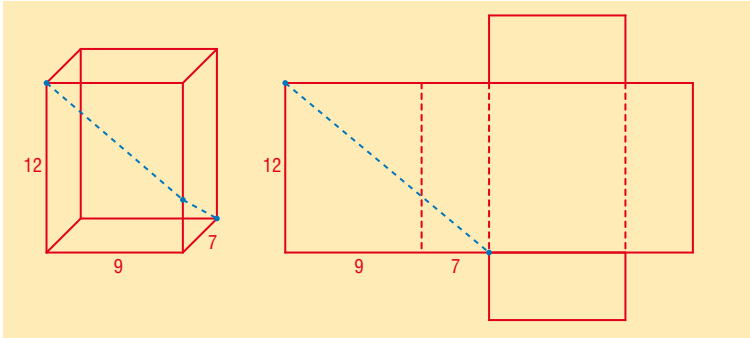
a) Kivonva a másodikból az első egyenletet egy elsőfokú kétismeretlenes egyenletet kapunk, melyből kifejezve az  $x$ -et behelyettesítjük azt az első egyenletbe:

$$(3+y)^2 - (3+y) + y^2 - 3y = 15, \text{ így a megoldások } x_1 = 1 \text{ és } y_1 = -2 \text{ vagy } x_2 = \frac{3}{2} \text{ és } y_2 = \frac{-3}{2}.$$

b) A második egyenlet kétszereséből az első egyenletet kivonva, majd a kapott elsőfokú egyenletből  $y$ -t kifejezve, és az első egyenletbe visszahelyettesítve adódik a megoldás:  $x = -1$  és  $y = 1$ .

## 1. Vizsgálódás a térben (104. oldal)

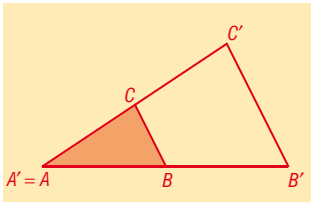
1. A szélességi körök közül csak az egyenlítő, a hosszúsági körök közül mind főkör.
2.  $7\sqrt{3}$  cm.
3.  $5\sqrt{2}$ .
4. A testátló  $\sqrt{474}$  dm, ami közelítőleg 60, 16, illetve 7,5%-kal nagyobb a lapátlónál.
5.
  - a) Henger, melynek magassága a téglalap forgástengelyre eső oldala, alapkörének sugara a téglalap másik oldala;
  - b) henger, melynek magassága a téglalap középvonalával párhuzamos oldala, alapkörének átmérője a téglalap másik oldala;
  - c) kettős kúp, azaz két egybevágó, egybeeső alaplapú forgáskúp, melyek magassága a négyzet átlójának a fele, alaplapjuk átmérője a négyzet átlója;
  - d) csonkakúp, mely alap- és fedőkörének átmérője a trapéz egy-egy alapja, magassága a trapéz magassága;
  - e) egy henger és két kúp, melyek az alaplapjaikkal illeszkednek a henger egy-egy alaplapjára, ahol a henger és a kúpok alapköreinek sugara a trapéz magassága, a henger magassága a trapéz rövidebb alapja, a kúpok magassága a trapéz alapjai különbségének a fele;
  - f) egy henger, melyből „kivágtunk” egy-egy, az alaplapjaira illeszkedő kúpot, ahol a henger magassága a trapéz hosszabb alapja, a két egybevágó kúp magassága a trapéz alapjai különbségének a fele, és a henger, valamint a kúpok alapkörének a sugara a trapéz magassága;
  - g) a körrel egyenlő sugarú gömb.
6. A kocka térfogata 125-szörösére nő.
7. Az élek nem közös végpontjai által meghatározott háromszög minden oldala a kocka egy-egy lap-átlója, mivel a kocka lapátlói egyenlő hosszúságúak, ezért a vizsgált háromszög szabályos.
8. A legrövidebb út hossza 20 egység. (Háromféleképp is ki lehet teríteni a téglatest oldalait egy síkba, a három eset közül az ábrán láthatóban lesz a legrövidebb az út.)



1.8. ábra

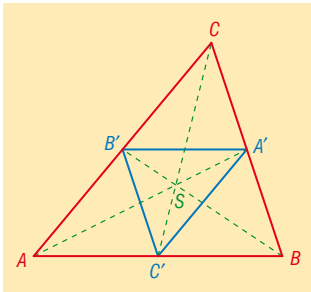
## 2. Középpontos hasonlóság (109. oldal)

1.



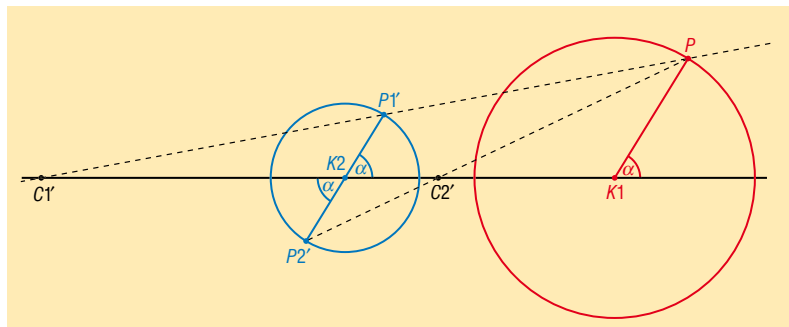
2.1. ábra

2. A kapott képháromszög oldalai az eredeti háromszög középvonalai.



2.2. ábra

3. Az egyik körön egy tetszőleges  $P$  pontot kiválasztva, majd a megfelelő szöget a másik kör középpontjába másolva (egyállású és fordított állású szögeként is) megkapjuk a  $P$  pont képeit pozitív és negatív hasonlósági arányra is. Ezután a képpontokat összekötve  $P$ -vel kimetszük a körök középpontjait összekötő egyenesből a hasonlóság centrumát ( $C'_1$  és  $C'_2$ ).



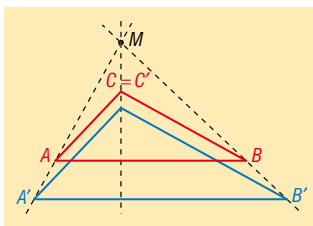
2.3. ábra

$r_1$ -gyel és  $r_2$ -vel jelölve a körök sugarait,

- ✦ ha  $K_1K_2 \neq 0$  és  $r_1 \neq r_2$ , akkor két hasonlósági középpontot,
- ✦ ha  $K_1K_2 \neq 0$  és  $r_1 = r_2$ , akkor egy hasonlósági középpontot,
- ✦ ha  $K_1K_2 = 0$ , akkor egy hasonlósági középpontot kapunk.

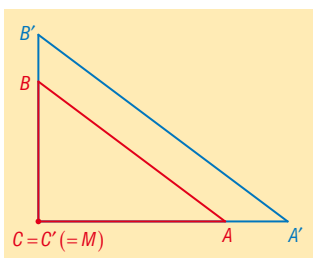
4.

a) Az egyes pontok képét egy  $M$  pontból induló félegyenes segítségével kaphatjuk meg.



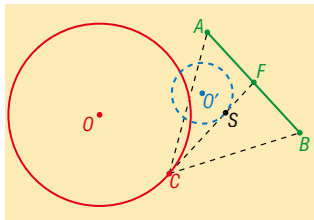
2.4. a) ábra

b)



2.4. b) ábra

5.  $FS = \frac{FC}{3}$  bármely  $C$  esetén  $\Rightarrow \frac{FS}{FC} = \frac{1}{3} =$  állandó, ami megfelel egy  $F$  középpontú,  $\frac{1}{3}$  arányú középpontos kicsinyítésnek  $\Rightarrow$  mivel a  $C$  csúcsok egy  $O$  középpontú körvonalra illeszkednek ( $k$ ), így a kicsinyítéssel kapott  $S$  súlypontok is egy körvonalra illeszkednek ( $k'$ , melynek középpontja az  $FO$  szakasz  $F$ -hez közelebbi harmadoló pontja, sugara pedig az eredeti kör sugarának a harmada). A  $k'$  körvonal minden pontja lehet valamely háromszög súlypontja, hiszen ennek a pontnak az  $F$  középpontú  $3$  arányú nagyításával éppen a  $k$  körre illeszkedő pontot kapunk.



2.5. ábra

## 3. Hasonlóságj transzformáció (113. oldal)

1. A derékszög szögfelezője által levágott háromszögek mindkét hegyesszöge  $45^\circ$ -os, így hasonlók az eredeti háromszöghöz.

A  $36^\circ$ -os szárszögű egyenlő szárú háromszög rendelkezik még ezzel a tulajdonsággal.

2.  $x = 15, y = 12,5, v = 5, z = 3$ .

3.

a) igaz;      b) hamis;      c) igaz;      d) igaz;      e) hamis.

4. Jelölje  $a_1, b_1, f_1$  az egyik,  $a_2, b_2, f_2$  a másik téglalap oldalait és átlóját!

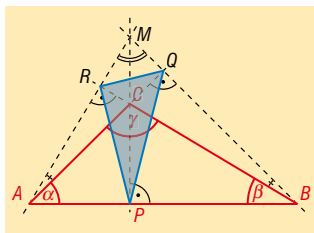
$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \Rightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{a_2}{a_1} = \lambda \Rightarrow \frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{\sqrt{(\lambda a_1)^2 + (\lambda b_1)^2}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{\sqrt{\lambda^2 (a_1^2 + b_1^2)}}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \lambda$$

$\Rightarrow$  a megfelelő oldalak és átlók aránya is egyenlő, tehát a két téglalap hasonló.

5. A lecke 4. példájának b) pontja alapján a megfelelő kis háromszögek és az eredeti háromszög hasonlóságából adódnak a talpponti háromszög szögei:

$$180^\circ - 2\alpha, 180^\circ - 2\beta, 180^\circ - 2\gamma.$$

Tompaszögű háromszögben:



3.5. ábra

$\angle RCQ = \gamma$  (mert csúcshögek)  $\Rightarrow$   $\triangle MRCQ$  hűnégyyszögben  $\angle RMQ = 180^\circ - \gamma$ ;

$\triangle AQM$  és  $\triangle BRM$  hasonló, derékszögű háromszögekben  $\angle RAC = \angle QBC = 90^\circ - \angle RMQ = \gamma - 90^\circ$ ;

Az első részhez hasonló gondolatmenettel ( $\triangle APR$ ,  $\triangle BQP$ ,  $\triangle MRQ$ ,  $\triangle ABM$  alapján) a talpponti  $\triangle PQR$  szögei:  $\alpha = 2\alpha, \beta' = 2\beta, \gamma' = 2\gamma - 180^\circ$ .

## 4. A hasonlóság alkalmazásai (118. oldal)

1. A két háromszög hasonlósága két szögük egyenlőségéből következik ( $90^\circ$ , szárszög fele).

$$r = 4,8 \text{ cm.}$$

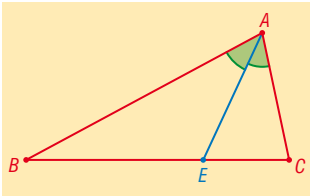
$$2. R = \frac{625}{48} \text{ cm} \approx 13,02 \text{ cm.}$$

3.

✦ kerületük 3-szorosára,  $\frac{2}{3}$ -szorosára, illetve  $\lambda$ -szorosára változik;

✦ területük 9-szeresére,  $\frac{4}{9}$ -szeresére, illetve  $\lambda^2$ -szeresére változik.

4.



4.4. ábra

A szögfelezőtétel szerint  $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CE}$ , ezt átrendezve:  $\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CE}$ .

## 5. Hasonló síkidomok kerülete és területe, hasonló testek felszíne és térfogata (125. oldal)

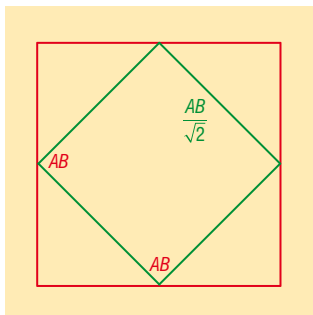
1.

	a)	b)	c)	d)
$\lambda$	2	3	$\frac{3}{4}$	1,1
$K$	2	3	$\frac{3}{4}$	1,1
$T$	4	9	$\frac{9}{16}$	1,21

2.

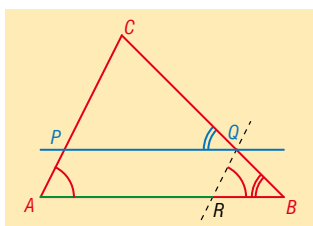
	a)	b)	c)	d)
$\lambda$	2	3	$\frac{3}{4}$	1,1
$A$	4	9	$\frac{9}{16}$	1,21
$V$	8	27	$\frac{27}{64}$	1,331

3. fele;  $\sqrt{2} : 1$ .



5.3. ábra

4.



5.4. ábra

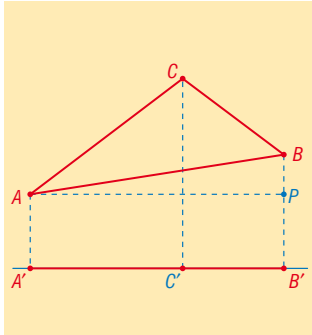
$T_{PQC} = \frac{T_{ABC}}{2} \Rightarrow PQ = \frac{AB}{\sqrt{2}}$ , mely szakasz az előző feladat alapján megszerkeszthető.  $PQ$ -t felmérjük  $A$ -ból  $AB$ -re, majd a kapott  $R$  ponton keresztül  $AC$ -vel párhuzamost szerkesztünk (szögmásolással), és a  $BC$ -ből így kimetszett  $Q$  ponton keresztül párhuzamost szerkesztünk  $AB$ -vel (szögmásolással).

5.

a) 1:4; b) 1:16; c) 1:16; d) 1:64; e) 1:4; f) 1:16; g) 1:64; h) 1:4; i) 1:1.

## 6. Egyéb nem egybevágóságú transzformációk (Kiegészítő anyag) (132-133. oldal)

1. Az nem igaz, hogy a kapott szakasz a háromszög egyik oldalánál sem hosszabb, de az igen, hogy a leghosszabb oldalnál nem hosszabb. Ugyanis egy szakasz merőleges vetülete mindig legfeljebb olyan hosszú, mint maga a szakasz. (Ha párhuzamos a merőleges affinitás tengelyével, akkor egyenlő hosszúak, ha pedig nem párhuzamos, akkor rövidebb a merőleges vetület. Így a háromszög valamelyik oldalánál biztosan rövidebb a merőleges vetület.)



6.1. ábra

2. Az inverz transzformáció tengelye  $e$ , aránya  $-\frac{3}{2}$ .
3. A definíció és az előző feladat alapján belátható a feladat állítása.
4. Először mutassuk meg, hogy minden paralelogrammához található olyan merőleges affinitás, amelynél a paralelogramma képe téglalap lesz!  
Ha a paralelogramma derékszögű (azaz eleve téglalap), akkor az identikus transzformáció megfelel. Ha a paralelogramma nem derékszögű, akkor vegyünk fel egy olyan  $e$  egyenest a paralelogramma egyik hegyesszögű csúcsán át ( $B$ ), amely a paralelogramma egyik szemközti oldalát annak belső pontjában metszi. (Ez az egyenes nem párhuzamos a paralelogramma egyik oldalával és átlójával sem.) A  $\lambda = 1$  speciális eset az identikus transzformációt állítja elő. Kezdjük el növelni ezután  $\lambda$  értékét! Ekkor a  $B$  csúccsal szomszédos két csúcs ( $A$  és  $C$ ) egyre távolabb kerül az  $e$  egyenestől. Elég nagy  $\lambda$  esetén elérhető, hogy  $BC$  és  $BA$  is  $45^\circ$ -nál nagyobb szöget zárjon be az  $e$  egyenessel. Ekkor az  $ABC$  szög már tompaszög lesz. Jelöljünk egy ilyen arányszámot  $\lambda'$ -vel! Tehát a  $\lambda$  növelése közben kellett lennie az  $]\lambda'; \lambda[$  intervallumban egy olyan  $\lambda_0$  értéknek, amelyik esetén az  $ABC$  szög derékszög. Mivel a párhuzamosok merőleges affinitással kapott képe is párhuzamos lesz, így a  $\lambda_0$  arányszám mellett a paralelogramma képe egy derékszögű paralelogramma lesz, vagyis téglalap. Akkor most oldjuk meg négyzetre!  
A fent leírtaknak megfelelően vegyünk fel egy  $e$  egyenest, majd rendeljük hozzá azt a  $\lambda_0$  arányszámot, amelynél a paralelogramma merőleges affin képe téglalap lesz! Ez a  $\lambda_0$  tehát minden  $e$  egyenesnél létezik. Kezdjük el most forgatni az  $e$  egyenest a  $BA$  egyenestől a  $BC$  egyenesig! (A két határegyenessel nem eshet egybe az  $e$ , mert akkor semmilyen  $\lambda$  esetén nem érhető el, hogy  $B$ -nél derékszög legyen.) A  $BA$  egyeneshez tetszőlegesen közel fölvehetjük az  $e$ -t. Minél közelebb vesszük fel, annál nagyobb lesz az  $e$ -hez rendelt  $\lambda_0$  értéke. ( $\lambda_0$  értékét tetszőleges értéknél nagyobbra növelhetjük, ha  $e$ -t közelítjük  $BA$ -hoz.) Így elérhető, hogy  $BC' > BA'$  legyen. És ugyanígy: ha az  $e$  egyenest a  $BC$ -hez közelítjük, akkor elérhető, hogy  $BC' < BA'$  legyen. Amíg az  $e$ -t a  $BA$  egyenestől

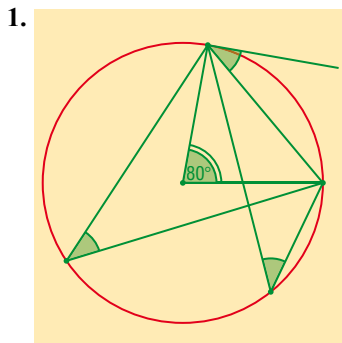
a  $BC$  egyenesig mozgatjuk, a  $BC' : BA'$  arány egy 1-nél nagyobb számtól egy 1-nél kisebb számba vált át (eközben folytonosan változik). Tehát közben valahol föl kellett vennie az 1 értéket. Ekkor nemcsak derékszögű a paralelogramma, hanem egyenlő oldalú is, vagyis négyzet.

5. a)  $x \mapsto 3\sqrt{x}$ ;      b)  $x \mapsto \sqrt{\frac{x}{3}}$ .

6. Középpontos hasonlóságot kapunk, melynek középpontja a tengelyek metszéspontja, aránya a mérőleges affinitások közös aránya.

7. A befogótétel alapján mindkét esetben belátható, hogy az így kapott  $P'$ -re  $OP' \cdot OP = r^2$ , tehát helyes a szerkesztés.

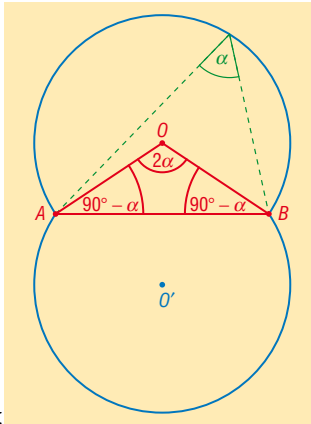
## 7. Kerületi és középponti szögek (Kiegészítő anyag) (139. oldal)



7.1. ábra

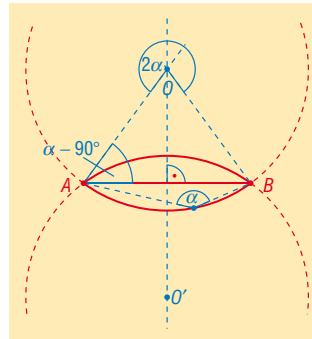
2. a)  $24^\circ$ ;    b)  $35^\circ$ ;    c)  $60^\circ$ ;    d)  $90^\circ$ ;    e)  $135^\circ$ ;    f)  $69,5^\circ$ .

3.



Ha  $\alpha < 90^\circ$ :

7.3. I. ábra



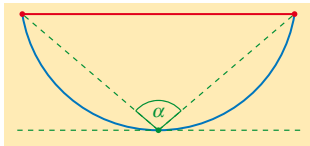
, ha  $\alpha > 90^\circ$ :

7.3. II. ábra

Az a), b) és d) esetekben megszerkesztjük (az alapon fekvő szögei segítségével) az  $ABO\Delta$ -et, majd tükrözzük  $O$ -t  $AB$ -re, végül  $O$ -ból és  $O'$ -ből  $OA$  sugárral megrajzoljuk a megfelelő köríveket. A  $90^\circ$ -os látószögműködő az  $AB$  szakasz Thalész-köre.

4.  $146^\circ$ .

5. Az érintő látószögműködő érintési pontja.



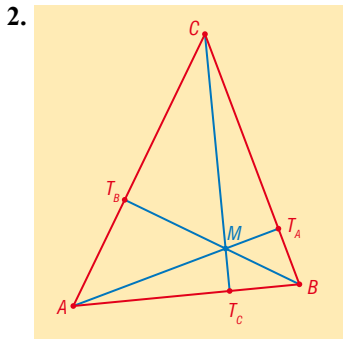
7.5. ábra

6. A kép Szegeden látható a Móra Ferenc Múzeumban. Javasoljuk, hogy tanulmányi kirándulás keretében látogassák meg a helyszínt.

7. Az ékszerüzletet szemléltető szakasz házakat érintő látószögműködőnek a házakat érintő pontjába. A kör középpontja rajta van az ékszerüzletet jelző  $AB$  szakasz felezőmerőlegesén, ami állandó távolságra van a tér szomszédos oldalától. Keressük meg a felezőmerőlegesnek azt a pontját, amely ilyen messze van  $A$ -tól!

## 8. Húrnégyszögek, alkalmazások (Kiegészítő anyag) (143-144. oldal)

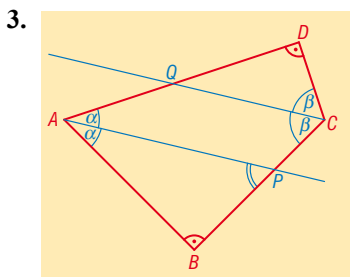
1. Általános trapéz; nem speciális derékszögű trapéz; általános paralelogramma; nem speciális rombusz; deltoid, melynek legfeljebb 1 derékszöge van.



8.2. ábra

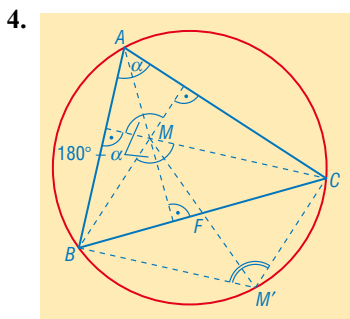
Hegyszögű háromszögben lévő húrnegyszögek: bármely két csúc és a belőlük kiinduló magasságvonalak talppontjai, illetve bármely csúc, a vele szomszédos 2 magasság talppontja és a magasságpont alkotta négyszög (3-3 darab):  $ABT_A T_B$ ,  $ACT_A T_C$ ,  $BCT_B T_C$ ,  $AT_C M T_B$ ,  $BT_A M T_C$ .

Tompaszögű háromszögben ugyanezek a pontok alkotják a húrnegyszögeket, csak egyes esetekben a pontok más sorrendben követik egymást.



8.3. ábra

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow APB\Delta$ -ben a kétíves szög is  $\beta$  nagyságú, így  $BPA\angle$  és  $BCQ\angle$  egyállású, tehát  $PA \parallel CQ$ . (Egybeesés deltoid esetén jön létre.)



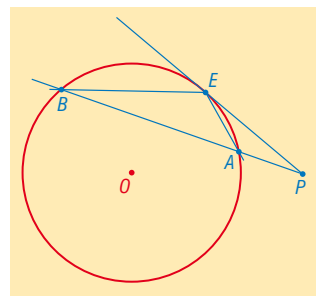
8.4. ábra

A tükrözés miatt  $CMBM'$  egy paralelogramma  $\Rightarrow$  a kétíves szög is  $180^\circ - \alpha$  nagyságú  $\Rightarrow$  A húrnegyszögek tételének megfordítása szerint  $ABM'C$  húrnegyszög, így  $M'$  illeszkedik az  $ABC\Delta$  körülírt körére. (Hasonlóan belátható a többi felezőpontra tükrözés esetén.)

5. A két háromszög hasonlósága két szögük egyenlőségéből következik ( $PBE\angle = PEA\angle$ , hiszen az  $AE$  ívhez tartozó kerületi szögek).

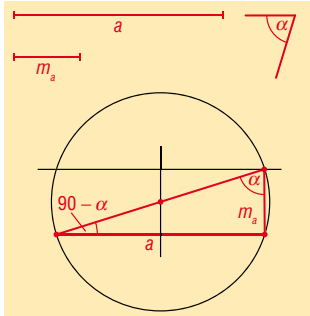
6. A két háromszög hasonlóságából felírható a megfelelő oldalak arányának egyenlősége, melyből következik a feladat állítása.

7. Az előző feladat alapján bármely szelő szeletei hosszának szorzata az érintőszakasz hosszának négyzete, ami adott külső pont esetén állandó.



8.5. és 8.6 ábra

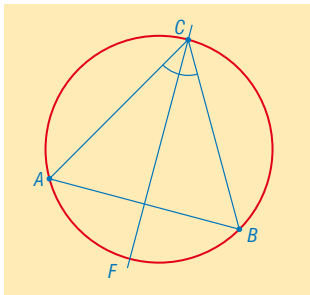
8.



8.8. ábra

- ✦ Húzzunk az adott oldallal párhuzamost a magasság távolságban!
- ✦ Szerkesszük meg az adott oldalra az adott szögű látószögmögívet (lásd előző lecke 3. feladat)!
- ✦ A látószögmögívet és a párhuzamos metszéspontja a háromszög harmadik csúcsa.

9.



8.9. ábra

$F$ -fel jelölve az  $AB$  ív és a szögfelező metszéspontját az  $ACF \angle$  és a  $BCF \angle$  egyenlőségéből következik, hogy a hozzájuk, mint kerületi szögekhez tartozó  $AF$  és  $FB$  ívek egyenlők.

## 1. Távolságok meghatározása arányokkal (153. oldal)

1. A háromszög belső szögfelezőjére vonatkozó tétel és az 1.1 ábra szerint:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{AC}{AC + AB}.$$

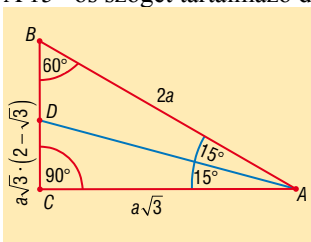
Mivel  $AC = a\sqrt{3}$ ,  $BC = a\sqrt{3}$  és  $AB = 2a$ , ezért a  $\frac{DC}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + 2a}$  egyenlőséget kapjuk. Ahonnan

$$DC = a\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}).$$

Pitagorasz tétele szerint:  $AD = \sqrt{(\sqrt{3}a)^2 + (\sqrt{3}a(2 - \sqrt{3}))^2} = \sqrt{6}a(\sqrt{3} - 1).$

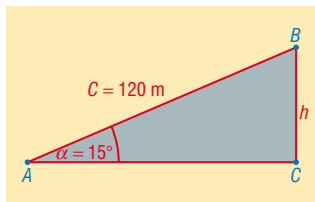
Tehát minden  $15^\circ$ -os szöveget tartalmazó derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó, a szög melletti befogó és az átfogó aránya  $(2 - \sqrt{3}) : 1 : \sqrt{2}(\sqrt{3} - 1).$

A  $15^\circ$ -os szöveget tartalmazó derékszögű háromszög.



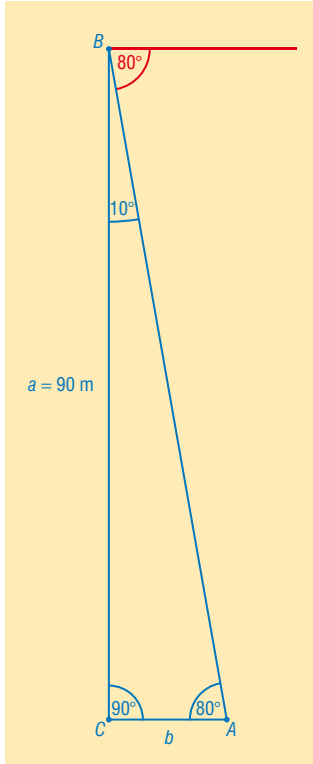
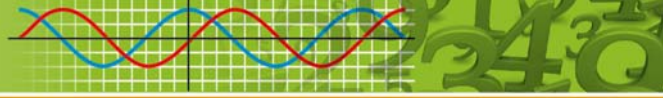
1.1 ábra

2. Az előző feladat eredménye és az 1.2. ábra alapján  $\frac{h}{120} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$ , ahonnan  $h = 30\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$  m.

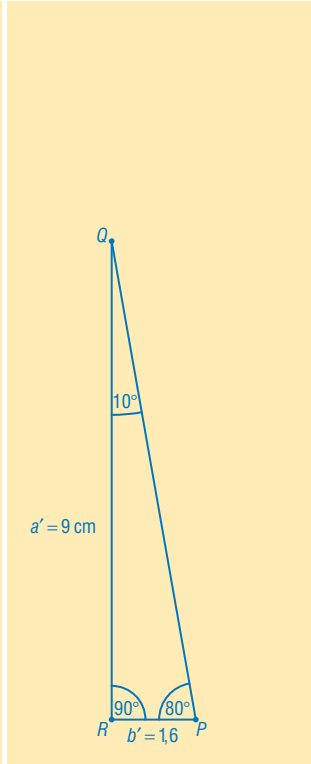


1.2. ábra

3. Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse a felhőkarcolót a  $BC$  szakasz, az ismerős lábát az  $A$  pont! A szöveg alapján  $BC = 90$  m, a  $B$ -nél levő depressziószög  $80^\circ$ . Jelöljük  $b$ -vel a keresett távolságot! (1.3. a) ábra) A feladat most már a következő: az  $ABC$  derékszögű háromszögben adott egy hegyesszög és az egyik befogó. Mekkora a másik befogó? Kicsinyítsük az  $ABC$  derékszögű háromszöget! Ekkor a kapott  $PQR$  háromszög (1.3. b) ábra) és az  $ABC$  háromszög hasonlóak, a megfelelő oldalai aránya megegyezik, azaz  $\frac{b(\text{m})}{90(\text{m})} = \frac{1,6(\text{cm})}{9(\text{cm})}$ . Innen  $b \approx 16$  m. Azt mondhatjuk tehát, hogy ismerősünk az épület aljától körülbelül 16 m távol van.

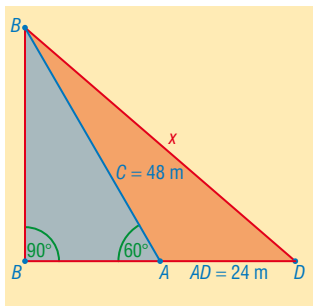


1.3. a) ábra



1.3. b) ábra

4. Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse az antennát a  $BC$  szakasz, a vízszintes talajon levő rögzítési pontokat az  $A$  és a  $D$  pontok! A szöveg alapján az  $A$ -nál levő szög  $60^\circ$ , az  $AD = 24$  m. Jelöljük  $x$ -szel a keresett távolságot! (1.4. ábra) Az  $ABC\Delta$  szögei  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $90^\circ$ -osak, korábbi tanulmányainkból tudjuk, hogy az oldalainak aránya  $AC : BC : AB = 1 : \sqrt{3} : 2$ . Így  $AC = 24$  m,  $BC = 24\sqrt{3}$  m. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét a  $DBC\Delta$ -re:  $x^2 = (24\sqrt{3})^2 + 48^2$ , ahonnan  $x = 24\sqrt{7}$  m  $\approx 63,50$  m. Tehát  $24\sqrt{7}$  m hosszú drótkötélre van szükség.



1.4. ábra

## 2. A hegyesszögek szögfüggvényei, összefüggések a hegyesszögek szögfüggvényei között (163-164. oldal)

1.

$\alpha$	$56,49^\circ$	$87^\circ42'$	$18^\circ35'$	$3^\circ32'$	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{7}$
$\sin \alpha$	0,8338	0,9992	0,3187	0,0615	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$	0,4339
$\cos \alpha$	0,5521	0,0401	0,9479	0,9981	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	0,9010
$\operatorname{tg} \alpha$	1,5103	24,8978	0,3362	0,0616	$\sqrt{2}-1$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	0,4816
$\operatorname{ctg} \alpha$	0,6621	0,0402	2,9743	16,2355	$\sqrt{2}+1$	$\sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}}$	2,0765

2.

$\operatorname{tg} \alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{15}{7}$	0,0078	123,89	1	$\sqrt{6}$
$\alpha$	$60^\circ$	$64,98^\circ$	$0,45^\circ$	$89,54^\circ$	$45^\circ$	$67,79^\circ$

3.

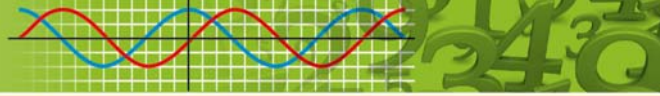
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\sqrt{2}$	$\frac{11}{7}$	0,2078	0,0894	15,26	$\frac{\pi}{4}$
$\alpha$	$35,26^\circ$	$32,47^\circ$	$78,26^\circ$	$84,89^\circ$	$3,75^\circ$	$51,85^\circ$

4.

$\sin \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{2}$	0,1278	0,894	$\sqrt{3}$	$\frac{\pi}{6}$
$\alpha$	$20,70^\circ$	$30^\circ$	$7,34^\circ$	$63,38^\circ$	–	$31,57^\circ$

5.

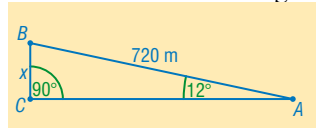
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{8}{7}$	0,8783	0,0089	0,2632	$\frac{\pi}{5}$
$\alpha$	$45^\circ$	–	$28,56^\circ$	$89,49^\circ$	$74,74^\circ$	$51,07^\circ$



6. a)  $\sqrt{2}$ ;    b)  $\frac{6+4\sqrt{3}}{3}$ ;    c)  $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$ ;    d)  $-1$ .

7. Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse a „dombot” a  $BC$  szakasz, a dombtetőre vezető utat az  $AB$  szakasz! A szöveg alapján az  $A$ -nál levő szög  $12^\circ$ , az  $AB = 720$  m. Jelöljük  $x$ -szel a keresett távolságot! (2.7. ábra)

Az ábra és a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója alapján:  $x = 720 \cdot \sin 12^\circ \approx 149,70$  m.  
Az út emelkedése:  $100 \cdot \operatorname{tg} 12^\circ \approx 21,26\%$  -os.



2.7. ábra

8. Készítsünk ábrát (2.8. ábra)! Az  $ADC\Delta$  szögei  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  és  $90^\circ$ -osak, korábbi tanulmányainkból tud-

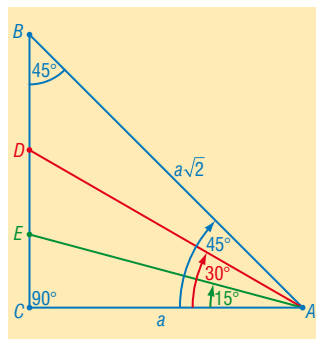
juk, hogy az oldalainak aránya  $CD : AC : AD = 1 : \sqrt{3} : 2$ . Innen  $CD = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$  és  $AD = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$ .

Így a  $BD = a - \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-1)$ .

Mivel minden  $15^\circ$ -os szöget tartalmazó derékszögű háromszögben a szöggel szemközti befogó, a szög melletti befogó és az átfogó aránya  $(2-\sqrt{3}) : 1 : \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ , ezért  $EC : AC = (2-\sqrt{3}) : 1$ .

Így  $EC = (2-\sqrt{3}) \cdot a$  és  $ED = CD - EC = \frac{a\sqrt{3}}{3} - (2-\sqrt{3})a = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})a$ .

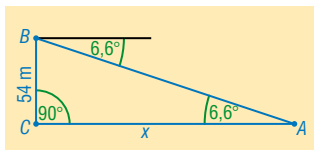
A megoldás:  $EC = (2-\sqrt{3}) \cdot a$ ,  $ED = \frac{2\sqrt{3}}{3}(2-\sqrt{3})a$ ,  $BD = \frac{a\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3}-1)$ .



2.8. ábra

9. Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse a világítótornyot a  $BC$  szakasz, a hajót az  $A$  pont! A szöveg alapján az  $A$ -nál levő szög  $6^\circ 36' = 6,6^\circ$ , a  $BC = 54$  m. Jelöljük  $x$ -szel a keresett távolságot! (2.9. ábra)

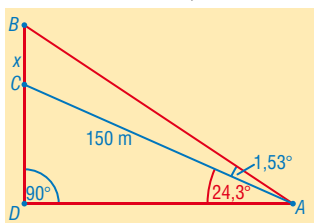
Az ábra és a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója alapján:  $x = \frac{54}{\operatorname{tg} 6,6^\circ} \approx 466,71$  m.



2.9. ábra

10. Készítsünk ábrát az adatok feltüntetésével a szöveg alapján! Szemléltesse az emlékművet a  $BC$  szakasz, a lejtőt az  $AC$  szakasz! A szöveg alapján a  $CAB\angle = 1^\circ 32' = 1,53^\circ$ , a  $DAC\angle = 24^\circ 18' = 24,3^\circ$  és az  $AC = 150$  m. Jelöljük  $x$ -szel a keresett távolságot! (2.10. ábra)

Az ábra és a hegyesszögek szögfüggvényeinek definíciója alapján:  $AD = 150 \cdot \cos 24,3^\circ \approx 136,71$  m,  $CD = 150 \cdot \sin 24,3^\circ \approx 61,73$  m és  $BD = AD \cdot \operatorname{tg} 25,83^\circ \approx 66,19$  m. Innen az emlékmű magassága:  $x = BD - CD \approx 4,46$  m.



2.10. ábra

## 3. Összefüggések egy hegyesszög szögfüggvényei között (170. oldal)

1.

a)

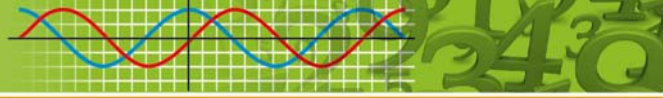
$\sin \alpha$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{2}$	0,75	$\frac{2}{\sqrt{a^2+4}}$ ( $a > 0$ )
$\cos \alpha$	$\frac{4}{5}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{4}$	$\frac{a}{\sqrt{a^2+4}}$ ( $a > 0$ )
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{3}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{3\sqrt{7}}{7}$	$\frac{2}{a}$ ( $a > 0$ )
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{4}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{7}}{3}$	$\frac{a}{2}$ ( $a > 0$ )

b)

$\cos \alpha$	$\frac{12}{13}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0,45	$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}}$ ( $a > 0$ )
$\sin \alpha$	$\frac{5}{13}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{319}}{20}$	$\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ ( $a > 0$ )
$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{5}{12}$	1	$\frac{\sqrt{319}}{9}$	$\frac{1}{a}$ ( $a > 0$ )
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{12}{5}$	1	$\frac{9\sqrt{319}}{319}$	$a$ ( $a > 0$ )

c)

$\operatorname{tg} \alpha$	$\frac{23}{15}$	$\sqrt{3}$	0,25	$\frac{\sqrt{a^2-4}}{2}$ ( $a > 2$ )
$\operatorname{ctg} \alpha$	$\frac{15}{23}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	4	$\frac{2}{\sqrt{a^2-4}}$ ( $a > 2$ )
$\sin \alpha$	$\frac{23}{\sqrt{754}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{17}}{17}$	$\frac{\sqrt{a^2-4}}{a}$ ( $a > 2$ )
$\cos \alpha$	$\frac{15}{\sqrt{754}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4\sqrt{17}}{17}$	$\frac{2}{a}$ ( $a > 2$ )



d)

$\text{ctg } \alpha$	$\frac{3}{8}$	1	10,25	$\frac{5}{\sqrt{4a^2 - 25}}$ ( $a > 2,5$ )
$\text{tg } \alpha$	$\frac{8}{3}$	1	$\frac{4}{41}$	$\frac{\sqrt{4a^2 - 25}}{5}$ ( $a > 2,5$ )
$\sin \alpha$	$\frac{8\sqrt{73}}{73}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{4\sqrt{1697}}{1697}$	$\frac{\sqrt{4a^2 - 25}}{2a}$ ( $a > 2,5$ )
$\cos \alpha$	$\frac{3\sqrt{73}}{73}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{41\sqrt{1697}}{1697}$	$\frac{5}{2a}$ ( $a > 2,5$ )

2.

a)  $(\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 2 \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha = 2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 2;$

b)  $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha;$

c)  $2 \text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} + \frac{\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha};$

d)  $\frac{\text{tg } \alpha}{1 + \text{tg}^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cos^2 \alpha}{\left(1 + \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}\right) \cos^2 \alpha} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha.$

3.

a)  $\sin 20^\circ - \cos 50^\circ + \cos^2 60^\circ - \cos 70^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin 40^\circ =$   
 $= \cos 70^\circ - \sin 40^\circ + \frac{1}{4} - \cos 70^\circ + \frac{3}{4} + \sin 40^\circ = 1;$

b)  $(1 - \cos 36^\circ)(1 + \sin 54^\circ) + \cos 54^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \text{ctg} 36^\circ =$   
 $= (1 - \cos 36^\circ)(1 + \cos 36^\circ) + \sin 36^\circ \cdot \cos 36^\circ \cdot \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = 1;$

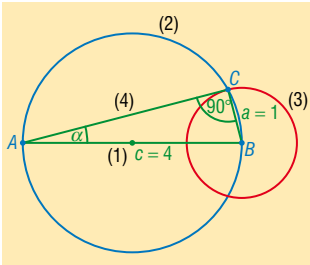
c)  $(\text{tg } 72^\circ \cdot \text{ctg } 18^\circ + 1) \cdot \cos^2 72^\circ = (\text{tg } 72^\circ \cdot \text{tg } 72^\circ + 1) \cdot \cos^2 72^\circ = \left(\frac{\sin^2 72^\circ}{\cos^2 72^\circ} + 1\right) \cdot \cos^2 72^\circ = 1;$

d)  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}.$

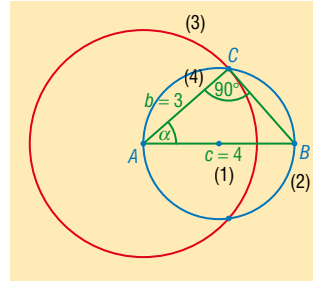
4.

a)  $\sin \alpha = \frac{1}{4};$

b)  $\cos \alpha = \frac{3}{4};$

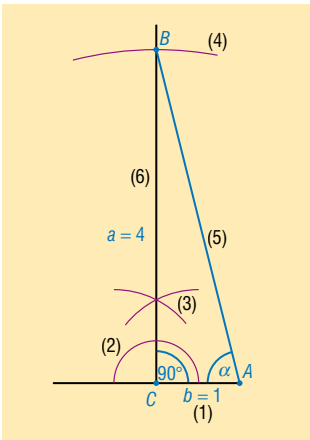


3.4. a) ábra



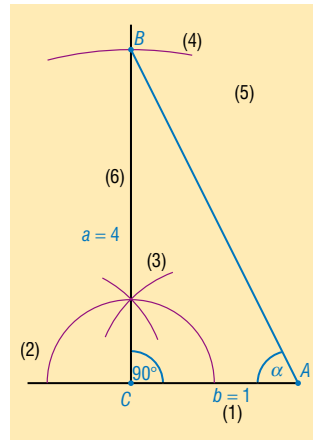
3.4. b) ábra

c)  $\operatorname{tg} \alpha = 4;$



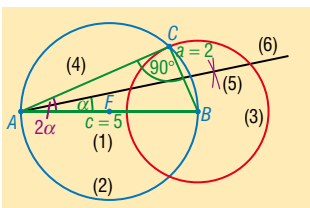
3.4. c) ábra

d)  $\operatorname{ctg} \alpha = 0,5;$



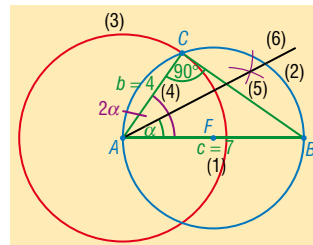
3.4. d) ábra

e)  $\sin 2\alpha = \frac{2}{5} \quad (0^\circ < \alpha < 45^\circ);$



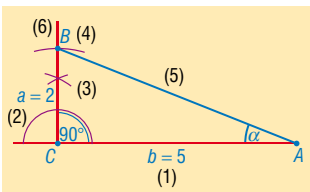
3.4. e) ábra

f)  $\cos 2\alpha = \frac{4}{7} \quad (0^\circ < \alpha < 45^\circ);$



3.4. f) ábra

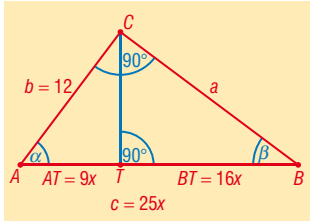
g)  $\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg} \alpha = 2,5.$



3.4. g) ábra

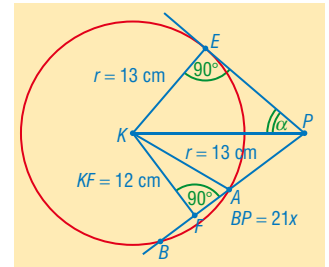
## 4. Síkgeometriai számítások (176-177. oldal)

1. Készítsünk ábrát (4.1. ábra)! A befogó tétel alapján  $12 = \sqrt{9x \cdot 25x}$ , innen  $x > 0$  miatt  $12 = 12x$ ,  $x = 1$ . Az átfogó:  $c = 25x = 25$  cm, Pitagorasztétele szerint  $a = \sqrt{25^2 - 12^2} = 16$  cm,  $\cos \alpha = \frac{12}{20}$ . Ahonnan a háromszög szögei:  $\alpha \approx 53,13^\circ$ ,  $\beta \approx 36,87^\circ$ ,  $\gamma = 90^\circ$ .



4.1. ábra

- 2.
- Az  $AKF$  derékszögű háromszögre alkalmazzuk Pitagorasztételét:  $AF = 5$  cm. Innen  $AP = BP - 2 \cdot AF = 11$  cm, a  $PE = \sqrt{AP \cdot BP} = \sqrt{231}$  cm  $\approx 15,20$  cm.
  - $PK^2 = r^2 + PE^2$  összefüggésből  $PK = \sqrt{r^2 + PE^2} = 20$  cm;
  - $\sin \alpha = \frac{13}{20}$  összefüggésből  $\alpha \approx 40,54^\circ$ .

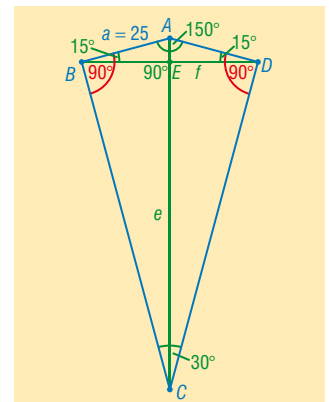


4.2. c) ábra

- 3.
- $t \approx 14,10$  cm<sup>2</sup>;    b)  $t \approx 26,06$  dm<sup>2</sup>;    c)  $t \approx 0,54$  m<sup>2</sup>.
- 4.
- $t \approx 29,01$  cm<sup>2</sup>;    b)  $t = 31,98\sqrt{3}$  dm<sup>2</sup>  $\approx 55,39$  dm<sup>2</sup>;    c)  $t \approx 3,28$  m<sup>2</sup>;    d)  $t \approx 62,77$  cm<sup>2</sup>.
- 5.
- $R \approx 2,66$  cm;    b)  $R \approx 4,04$  dm;    c)  $R \approx 8,27$  m.

6. I. eset:

- $f = 2a \cdot \cos 15^\circ \approx 48,30$  cm,  $e = \frac{a}{\sin 15^\circ} \approx 96,59$  cm;
- Ekkor a vásárolt mennyiség:  $A = \frac{t}{0,9} \approx 2591$  cm<sup>2</sup>.

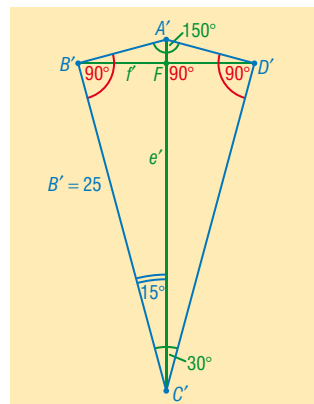


4.6. I. ábra

II. eset:

a)  $f' = 2a \cdot \sin 15^\circ \approx 12,94 \text{ cm}$ ,  $e' = \frac{a}{\cos 15^\circ} \approx 25,88 \text{ cm}$ ;

b) Ekkor a vásárolt mennyiség:  $A' = \frac{f'}{0,9} \approx 186,05 \text{ cm}^2$ .



4.6. II. ábra

7.

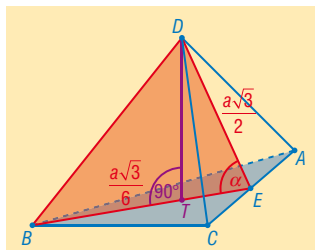
- a) 41,35%;    b) 82,70%;    c) 92,07%;    d) 95,49%.

## 5. Térgeometriai számítások (179-180. oldal)

1.

- a)  $\alpha \approx 54,74^\circ$ ;    b)  $90^\circ$ .

2.  $\cos \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha \approx 70,53^\circ$ .

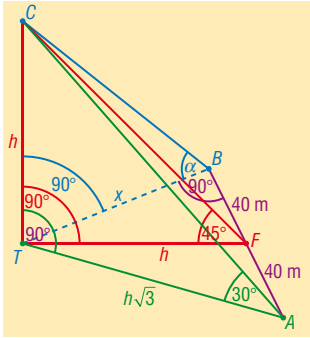
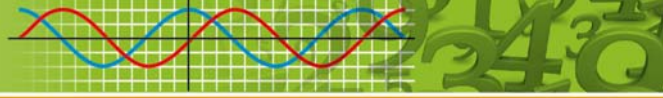


5.2. ábra

3.

a) Az  $x^2 + 80^2 = 3h^2$  és az  $x^2 + 40^2 = h^2$  egyenletekből ( $x > 0, h > 0$ ) álló egyenletrendszer megoldása:  $h = 20\sqrt{6} \text{ m} \approx 48,99 \text{ m}$ ,  $x = 20\sqrt{2} \text{ m} \approx 28,28 \text{ m}$ . A torony magassága  $20\sqrt{6} \text{ m}$ .

b)  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{x} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$ .



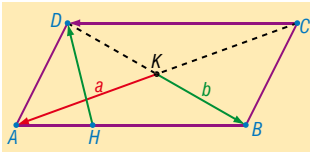
5.3. ábra

4.

- a) 49,11°;    b) 45°;    c) 69,30°;    d) 135,58°.

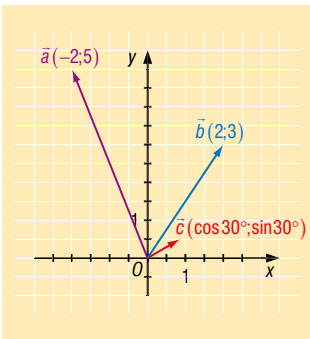
**6. Vektorok a koordinátásíkon (187. oldal)**

1.  $\overline{BC} = -\vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overline{CD} = \vec{a} - \vec{b}$ ,  $\overline{AC} = -2\vec{a}$ ,  $\overline{BD} = -2\vec{b}$ ,  $\overline{AK} = -\vec{a}$ ,  $\overline{HD} = -\frac{2}{3}(2\vec{b} + \vec{a})$ .



6.1. ábra

2.



6.2. ábra

3.  $\vec{a} = \vec{p}$ ,  $\vec{b} = \vec{r}$ ,  $\vec{c} = \vec{q}$ ,  $\vec{d} = \vec{m}$ ,  $\vec{e} = \vec{n}$ .

4.

- a)  $\sqrt{5}$ ;    b)  $\sqrt{13}$ ;    c) 1;    d) 1;    e) 1;    f) 2.

5.

a)  $3\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{7}{2}\vec{c}(-33; -1)$ ,  $\left|3\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{7}{2}\vec{c}\right| = \sqrt{1090}$ ;

b)  $\overline{AB}(5; -12)$ ,  $|\overline{AB}| = 13$ ;

c)  $\overline{CB}(-6; -8)$ ,  $|\overline{CB}| = 10$ ;

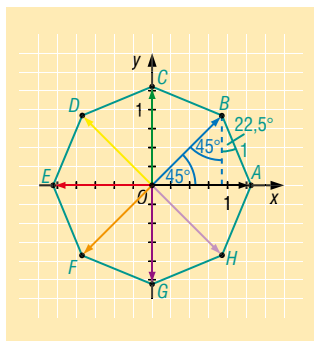
d)  $-\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{2}{3}\vec{a}(-11; -8)$ ,  $\left|-\frac{3}{2}\overline{BC} + \frac{2}{3}\vec{a}\right| = \sqrt{185}$ .

6.  $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = |\overline{OC}| = |\overline{OD}| = |\overline{OE}| = |\overline{OF}| = |\overline{OG}| = |\overline{OH}| = \frac{1}{2\sin 22,5^\circ} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}$ .

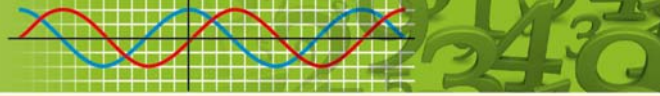
$$\overline{OA}\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}; 0\right), \overline{OB}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right), \overline{OC}\left(0; \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right), \overline{OD}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right),$$

$$\overline{OE}\left(-\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}; 0\right), \overline{OF}\left(-\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right), \overline{OG}\left(0; -\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}\right),$$

$$\overline{OH}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}; -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right).$$



6.6. ábra



## 7. A szinusz és a koszinusz szögfüggvények általános értelmezése (194-195. oldal)

1.  $\sin 405^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$ ,  $\cos 405^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$ ;

$\sin 2391^\circ = \sin 231^\circ = -\sin 51^\circ \approx -0,7771$ ,  $\cos 2391^\circ = \cos 231^\circ = -\cos 51^\circ \approx -0,6293$ ;

$\sin 1323^\circ = \sin 243^\circ = -\sin 63^\circ \approx -0,8910$ ,  $\cos 1323^\circ = \cos 243^\circ = -\cos 63^\circ \approx -0,4540$ ;

$\sin 110^\circ = \sin 70^\circ \approx 0,9397$ ,  $\cos 110^\circ = -\cos 70^\circ \approx -0,3420$ ;

$\sin 257^\circ = -\sin 77^\circ \approx -0,9744$ ,  $\cos 257^\circ = -\cos 77^\circ \approx -0,2250$ ;

$\sin 2850^\circ = \sin 330^\circ = -\sin 30^\circ = -0,5$ ,  $\cos 2850^\circ = \cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660$ ;

$\sin(-315^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$ ,  $\cos(-315^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071$ ;

$\sin(-9130^\circ) = \sin 230^\circ = -\sin 50^\circ \approx -0,7660$ ,  $\cos(-9130^\circ) = \cos 230^\circ = -\cos 50^\circ \approx -0,6428$ ;

$\sin(-876^\circ) = \sin 204^\circ = -\sin 24^\circ \approx -0,4067$ ,  $\cos(-876^\circ) = \cos 204^\circ = -\cos 24^\circ \approx -0,9135$ .

2.

a)  $k, l \in \mathbb{Z}$ ;

$\sin \alpha$	-0,602	-1	0,279	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$
$\alpha_{1;2}$	$322,99^\circ + k360^\circ$ $217,01^\circ + l360^\circ$	$270^\circ + k360^\circ$	$16,20^\circ + k360^\circ$ $163,80^\circ + l360^\circ$	$240^\circ + k360^\circ$ $300^\circ + l360^\circ$	-

$\sin \alpha$	0,005	0	1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-0,5
$\alpha_{1;2}$	$0,29^\circ + k360^\circ$ $179,71^\circ + l360^\circ$	$k180^\circ$	$90^\circ + k360^\circ$	$225^\circ + k360^\circ$ $315^\circ + l360^\circ$	$210^\circ + k360^\circ$ $330^\circ + l360^\circ$

b)  $k, l \in \mathbb{Z}$ .

$\cos \alpha$	-0,6543	1	0,879	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\alpha_{1;2}$	$130,87^\circ + k360^\circ$ $229,13^\circ + l360^\circ$	$k360^\circ$	$28,48^\circ + k360^\circ$ $331,52^\circ + l360^\circ$	$120^\circ + k360^\circ$ $240^\circ + l360^\circ$	$41,81^\circ + k360^\circ$ $318,19^\circ + l360^\circ$

$\cos \alpha$	0,0125	0	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	-3,5
$\alpha_{1;2}$	$89,28^\circ + k360^\circ$ $270,72^\circ + l360^\circ$	$90^\circ + k180^\circ$	$180^\circ + k360^\circ$	$135^\circ + k360^\circ$ $225^\circ + l360^\circ$	-

3.  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ ;  $\cos 90^\circ + \sin 180^\circ = \cos(-\alpha) - \cos \alpha$ ;  $\sin(180^\circ + \alpha) = \sin(-\alpha)$ ;  
 $\cos(180^\circ - \alpha) = \cos(180^\circ + \alpha)$ ;  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin 150^\circ - \cos 240^\circ$ .

4.

a)  $\frac{63\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2 \approx 54,56 \text{ cm}^2$ ;    b)  $6,36 \text{ dm}^2$ ;    c)  $84,96 \text{ mm}^2$ ;    d)  $365,735 \text{ m}^2$ .

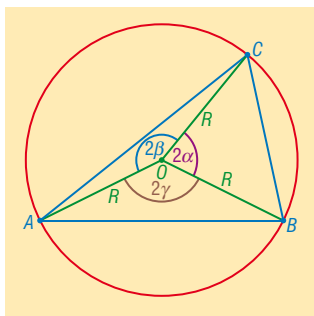
5. Az  $a = 2R \sin \alpha$  összefüggés alapján:

$a$	$R$	$\alpha$
$4\sqrt{2} \approx 5,55 \text{ cm}$	4 cm	$135^\circ$
3,2 dm	1,68 dm	$72^\circ$
7,92 dm	3,96 cm	$90^\circ$
6	5	$36,87^\circ, 143,13^\circ$
92,18	$378,19$	$173^\circ$

6.

a) I. eset: a háromszög hegyesszögű

$$t_{ABC} = t_{OAB} + t_{OAC} + t_{OBC} = \frac{R^2 \sin 2\gamma}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

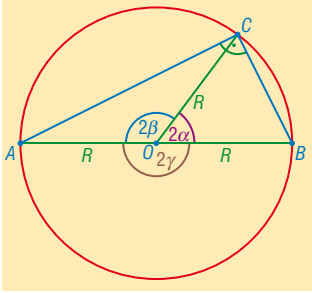
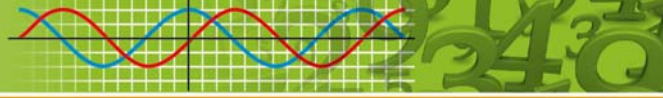


7.6. a) I. ábra

II. eset: a háromszög derékszögű

$$t_{ABC} = t_{OAC} + t_{OBC} = \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} \text{ és } \sin 2\gamma = \sin 180^\circ = 0, \text{ így}$$

$$t_{ABC} = \frac{R^2 \sin 2\gamma}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}.$$

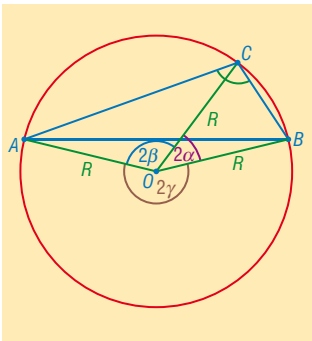


7.6. a) II. ábra

III. eset: a háromszög tompaszögű

$$t_{ABC} = -t_{OAB} + t_{OAC} + t_{OBC} = -\frac{R^2 \sin(2\alpha + 2\beta)}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2} \text{ és a } \sin(2\alpha + 2\beta) = -\sin 2\gamma$$

$$\text{alapján } t_{ABC} = \frac{R^2 \sin 2\gamma}{2} + \frac{R^2 \sin 2\beta}{2} + \frac{R^2 \sin 2\alpha}{2}.$$



7.6. a) III. ábra

b) a  $t = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2}$  és a  $\sin \alpha = \frac{a}{2R}$  összefüggések alapján:  $t = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{bc \cdot \frac{a}{2R}}{2} = \frac{abc}{4R}$ ;

c) a  $t = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2}$ ,  $b = 2R \cdot \sin \beta$  és a  $c = 2R \cdot \sin \gamma$  összefüggések alapján:

$$t = \frac{bc \cdot \sin \alpha}{2} = \frac{2R \sin \beta \cdot 2R \sin \gamma \cdot \sin \alpha}{2} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma;$$

d) a  $t = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$  és a  $R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$  összefüggések alapján:

$$t = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = 2 \frac{a^2}{4 \sin^2 \alpha} \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma = \frac{a^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}{2 \sin \alpha}.$$

## 8. A tangens és a kotangens szögfüggvények általános értelmezése (198. oldal)

1.

$\alpha$	$405^\circ$	$450^\circ$	$1323^\circ$	$110^\circ$	$257^\circ$	$360^\circ$	$-315^\circ$	$-9130^\circ$	$-876^\circ$
$\operatorname{tg}\alpha$	1	-	1,9626	-2,7475	4,3315	0	1	1,1918	0,4452
$\operatorname{ctg}\alpha$	1	0	0,5095	-0,3640	0,2309	-	1	0,8391	2,2460

2.

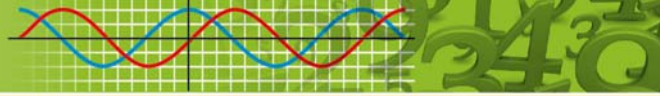
a)  $k \in \mathbb{Z}$ ;

$\operatorname{tg}\alpha$	-0,602	20,279	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{11}}{3}$	0,005
$\alpha$	$148,95^\circ + k \cdot 180^\circ$	$87,18^\circ + k \cdot 180^\circ$	$150^\circ + k \cdot 180^\circ$	$47,87^\circ + k \cdot 180^\circ$	$0,29^\circ + k \cdot 180^\circ$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	-1	-0,5		
$\alpha$	$k \cdot 180^\circ$	$135^\circ + k \cdot 180^\circ$	$153,43^\circ + k \cdot 180^\circ$		

b)  $k \in \mathbb{Z}$ .

$\operatorname{ctg}\alpha$	-0,43	1	0,879	$-\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{5}}{3}$
$\alpha$	$113,27^\circ + k \cdot 180^\circ$	$45^\circ + k \cdot 180^\circ$	$48,68^\circ + k \cdot 180^\circ$	$150^\circ + k \cdot 180^\circ$	$53,30^\circ + k \cdot 180^\circ$
$\operatorname{ctg}\alpha$	0,0125	0	-3,5		
$\alpha$	$89,28 + k \cdot 180^\circ$	$90^\circ + k \cdot 180^\circ$	$164,05^\circ + k \cdot 180^\circ$		

3.  $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}(-\alpha)$ ;  $\operatorname{ctg}90^\circ + \operatorname{tg}180^\circ = \operatorname{ctg}(-\alpha) + \operatorname{ctg}\alpha$ ;  $\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$ ;  
 $\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$ ;  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{(\operatorname{tg}240^\circ - \operatorname{ctg}135^\circ)(\operatorname{ctg}390^\circ + \operatorname{tg}315^\circ)}{2}$ .



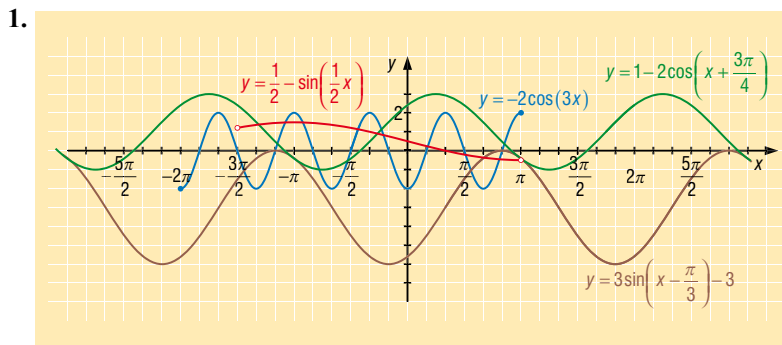
4.

$\alpha$ (radián)	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\alpha$ (fok)	$-90^\circ$	$-60^\circ$	$-45^\circ$	$-30^\circ$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
$\cos \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	-

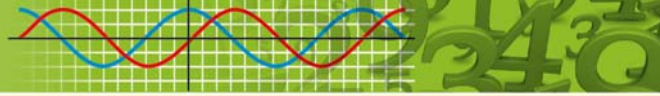
  

$\alpha$ (radián)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\pi$
$\alpha$ (fok)	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

## 9. A szinusz- és a koszinuszfüggvény grafikonja, jellemzése (209. oldal)



	$f(x) =$ $= 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$	$g(x) = -2 \cos 3x$	$h(x) = \frac{1}{2} - \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	$i(x) = 1 - 2 \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$
<b>Értelmezési tartomány</b>	$\mathbb{R}$	$[-2\pi; \pi]$	$\left[-\frac{3\pi}{2}; \pi\right]$	$\mathbb{R}$
<b>Értékkészlet</b>	$[-6; 0]$	$[-2; 2]$	$\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$	$[-1; 3]$
<b>Periódus</b>	$2\pi$	Nem periodikus	Nem periodikus	$2\pi$
<b>Zérushely</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$	$-\frac{11\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{3}$ , ahol $l \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{5\pi}{12} + k \cdot 2\pi$ , $\frac{11\pi}{12} + k \cdot 2\pi$
<b>Maximumhely</b> <b>Maximum</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi$	$-\frac{5\pi}{3} + l \cdot \frac{2\pi}{3}$ , ahol $l \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$	$-\pi$	$\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi$
	0	2	$\frac{3}{2}$	3
<b>Minimumhely</b> <b>Minimum</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi$	$-2\pi + l \cdot \frac{2\pi}{3}$ , ahol $l \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$	$\pi$	$-\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi$
	-6	-2	$-\frac{1}{2}$	-1
<b>Szigorúan monoton nő</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\left[-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right]$	$-\frac{11\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{3}$ , ahol $l \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$	$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\pi\right]$	$\left[-\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right]$
<b>Szigorúan monoton fogy</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\left[\frac{5\pi}{6} + k \cdot 2\pi; \frac{11\pi}{6} + k \cdot 2\pi\right]$	$-\frac{11\pi}{6} + l \cdot \frac{\pi}{3}$ , ahol $l \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$	$[-\pi; \pi]$	$\left[\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi; \frac{5\pi}{4} + k \cdot 2\pi\right]$
<b>Paritás</b>	Nem páros, nem páratlan	Nem páros, nem páratlan	Nem páros, nem páratlan	Nem páros, nem páratlan



2.

a)  $f(x) = \cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ;    b)  $g(x) = 3 \cos 2x = 3 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ ;

c)  $h(x) = \cos\left(\pi - \frac{2}{3}x\right) = -\sin\left(\frac{2}{3}x + \frac{\pi}{2}\right)$ .

3.

a)  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 2$ ;  $f\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}$ ;    b)  $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$ ;  $g\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

4.

a) igaz;    b) igaz;    c) hamis;    d) hamis;    e) hamis;    f) igaz;    g) hamis.

5.

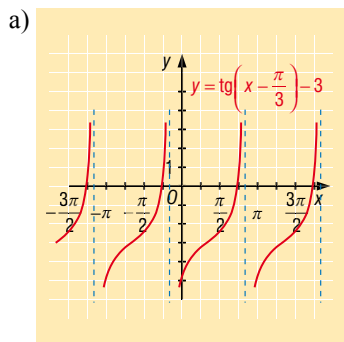
a)  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;    b)  $-\frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

c)  $\frac{\pi}{4} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;    d)  $\frac{2\pi}{3} + k \cdot 2\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{3} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;

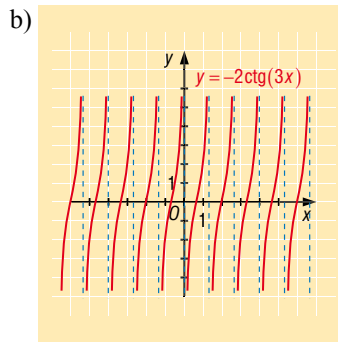
e)  $x = \frac{\pi}{6} + k \cdot 2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $x = \frac{5\pi}{6} + l \cdot 2\pi$ ,  $l \in \mathbb{Z}$ ;    f)  $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 10. A tangens- és a kotangensfüggvény grafikonja, tulajdonságai (216. oldal)

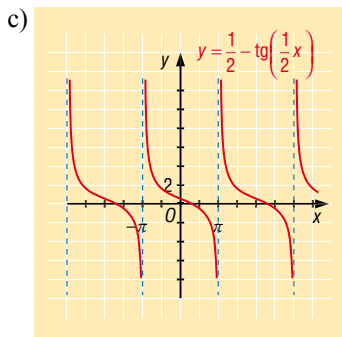
1.



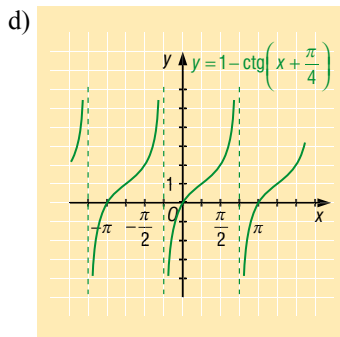
10.1. a) ábra



10.1. b) ábra



10.1. c) ábra

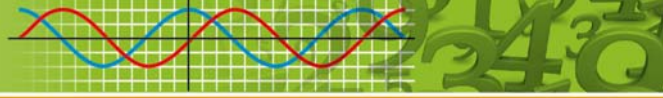


10.1. d) ábra

	$f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 3$	$g(x) = -2 \operatorname{ctg} 3x$	$h(x) = \frac{1}{2} - \operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}x\right)$	$i(x) = 1 - \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
<b>Értelmezési tartomány</b>	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k \cdot 2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
<b>Értékkészlet</b>	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
<b>Periódus</b>	$\pi$	$\frac{\pi}{3}$	$2\pi$	$\pi$
<b>Zérushely</b> $k \in \mathbb{Z}$	$2,2962 + k \cdot \pi$	$\frac{\pi}{6} + k \cdot \frac{\pi}{3}$	$0,9273 + k \cdot 2\pi$	$k \cdot \pi$
<b>Szélsőérték</b>	nincs	nincs	nincs	nincs
<b>Szigorúan monoton nő</b> $k \in \mathbb{Z}$	$\left] -\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi; \frac{5\pi}{6} + k \cdot \pi \right[$	$\left] k \cdot \frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{\pi}{3} \right[$	–	$\left] -\frac{\pi}{4} + k \cdot \pi; \frac{3\pi}{4} + k \cdot \pi \right[$
<b>Szigorúan monoton fogy</b> $k \in \mathbb{Z}$	–	–	$\left] -\pi + k \cdot 2\pi; \pi + k \cdot 2\pi \right[$	–
<b>Paritás</b>	Nem páros, nem páratlan	Páratlan	Nem páros, nem páratlan	Nem páros, nem páratlan

2.

a)  $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = 0, f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2};$       b)  $g\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{4\sqrt{3}}{9}, g\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = 0.$



3.

a)  $x = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z};$     b)  $\frac{\pi}{3} + k \cdot \pi < x < \pi + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z};$

c)  $-\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi < x < \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z};$     d)  $-\frac{\pi}{6} + k \cdot \pi \leq x \leq \frac{\pi}{6} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}.$

4.

a)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{4} + l \cdot \pi, l \in \mathbb{Z} \right\};$  b)  $\left\{ l \cdot \frac{\pi}{4}, l \in \mathbb{Z} \right\};$  c)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\};$

d)  $\left\{ \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{ \pi + l \cdot 2\pi, l \in \mathbb{Z} \};$  e)  $\left\{ l \cdot \frac{\pi}{6}, l \in \mathbb{Z} \right\};$

f)  $\left\{ l \cdot \frac{\pi}{4}, l \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{3} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

5.

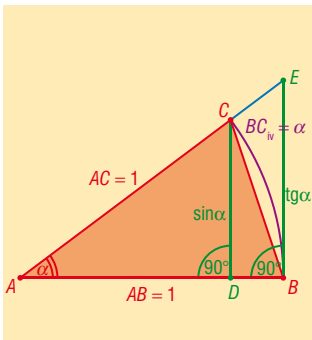
a) i;    b) h;    c) h;    d) h.

6. Bizonyítás:

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\operatorname{tg} \alpha.$$

7.

a), b)



10.7. a) és b) ábra

Az ábra alapján:  $t_{ABC\Delta} < t_{ABC\text{körcikk}}$  és  $t_{ABC\text{körcikk}} < t_{ABE\Delta}$ , így  $\frac{1 \cdot \sin \alpha}{2} < \frac{l^2 \cdot \alpha}{2}$  és  $\frac{l^2 \cdot \alpha}{2} < \frac{1 \cdot \operatorname{tg} \alpha}{2}$ . Innen a  $\sin \alpha < \alpha$  és az  $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$  egyenlőtlenségek adódnak.

c) I. eset:  $\alpha = \beta \Rightarrow \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \sin \alpha = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$ .

II. eset:  $\alpha \neq \beta$ . Feltehető, hogy  $\beta > \alpha$ . Készítsünk ábrát!

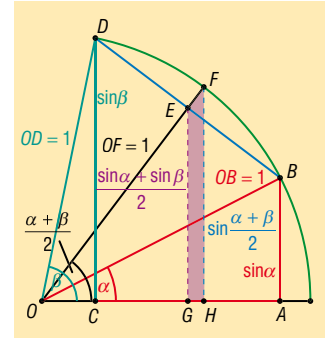
A hegyesszögek szinuszának definíciója alapján:  $FH = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  
 $AB = \sin \alpha$  és  $CD = \sin \beta$ .

Az  $EG$  az  $ABDC$  trapéz középvonala, így  $EG = \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2}$ .

Mivel  $OE < OF \Rightarrow FH < EG$ , ezért a fentiek miatt, bármely

$\alpha, \beta$  hegyesszögre a  $\frac{\sin \alpha + \sin \beta}{2} \leq \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$  adódik.

(A szinuszfüggvény grafikonja a  $0; \frac{\pi}{2}$ -on konkáv.)



10.7. c) ábra

d) I. eset:  $\alpha = \beta \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2}$ .

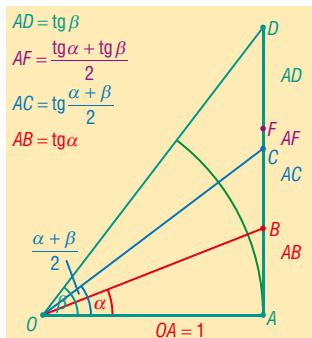
II. eset:  $\alpha \neq \beta$ . Feltehető, hogy  $\beta > \alpha$ . Készítsünk ábrát!

A hegyesszögek tangensének definíciója alapján:  $AC = \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$ ,  $AB = \operatorname{tg} \alpha$  és  $AD = \operatorname{tg} \beta$ .

Legyen  $F$  a  $BD$  szakasz felezőpontja, ekkor  $AF = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2}$ . Mivel  $OB < OD$ , ezért a belső szögfelezőre vonatkozó tétel szerint  $BC < CD$ . Így  $AC < AF$ , ahonnan a fentiek miatt bármely

$\alpha, \beta$  hegyesszögre a  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{2} \geq \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}$  adódik.

(A tangensfüggvény grafikonja a  $0; \frac{\pi}{2}$ -on konvex.)



10.7. d) ábra



## 1. Skatulyaelv, tétel és megfordítása, egyszerű gráfelméleti fogalmak (224-225. oldal)

1.

a) 5;    b) 9;    c) 33;    d) 37;    e) 31;    f) 21.

2.

a) 31;    b) 26;    c) 26.

3. Az osztály 37 fős.

4. Az osztály 32 fős.

5. Igaz.

6.  $n$ -féle osztási maradék lehetséges:  $0; 1; 2; \dots; n-1$ , így  $n+1$  db egész szám közt biztosan van két azonos osztási maradékú  $\Rightarrow$  különbségük osztható lesz  $n$ -nel.

7. Mivel 5-féle 5-ös osztási maradék lehetséges ( $-2, -1, 0, +1, +2$ ), ezért a  $21 (= 5 \cdot 4 + 1)$  szám közt biztosan van 5 db azonos maradékú, így  $m$ -mel jelölve a maradékot az öt szám összege:

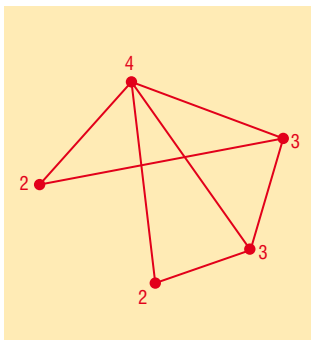
$$(5a + m) + (5b + m) + (5c + m) + (5d + m) + (5e + m) = 5(a + b + c + d + e) + 5m,$$

azaz osztható 5-tel.

8. A 7-es osztási maradékokat 4-féle skatulyába sorolhatjuk ( $-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ ), és az egyikben biztosan van két szám az ötből  $\Rightarrow$  ha skatulyán belül azonos a maradékuk, akkor a különbségük, ha ellentétes előjelű, akkor az összegük lesz osztható 7-tel.

9. A négyzetszámok 5-ös osztási maradéka 3-féle lehet ( $0, +1, -1$ ), melyből következik az állítás.

10.



1.10. ábra

11. Nem.

12. *Indirekt*: tegyük fel, hogy minden csúcs fokszáma különböző  $(0; 1; 2; 3; \dots; n-1)$ , ami ellentmondásra vezet  $(0 \leftrightarrow n-1)$ .

13.

- a) Igaz;  
megford.: Ha egy négyszög átlói felezik egymást, akkor az téglalap (hamis).
- b) Hamis;  
megford.: Ha egy háromszög egyenlő szárú, akkor az egyik súlyvonala merőleges az egyik oldalára (igaz).
- c) Igaz;  
megford.: Ha egy háromszög egyik oldala fele egy másik oldalának, akkor a háromszög belső szögeinek aránya  $1 : 2 : 3$  (hamis).
- d) Hamis;  
megford.: Ha egy négyszögnek van köré írható köre, akkor két szögének összege  $180^\circ$  (igaz).
- e) Igaz;  
megford.: Ha egy négyszög oldalai egyenlők, akkor az átlói merőlegesen felezik egymást (igaz).
- f) Igaz;  
megford.: Ha két pozitív egész szám közül az egyik osztható 9-cel, akkor a két szám legkisebb közös többszöröse 45 (hamis).

14. Mivel egy 4 cm oldalú, azaz  $16 \text{ cm}^2$  területű négyzetbe legfeljebb  $8 \text{ cm}^2$  területű háromszög írható, és bármely pillanatban van olyan 4 cm oldalú négyzet, melyben van 3 hangya, ezért az általuk meghatározott háromszög területe nem lehet nagyobb  $8 \text{ cm}^2$ -nél.

15.  $201 = 2 \cdot 100 + 1$ , így a nagy négyzetet 100 db 10 cm-es oldalú kis négyzetre vágva biztosan van olyan kis négyzet, melyben van legalább 3 pont. Egy ilyen kis négyzet lefedhető egy

$$\left(\frac{10\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \pi \approx 157 \text{ cm}^2 \text{ területű körrel, melyből következik a feladat állítása.}$$

## 2. Bevezető kombinatorikafeladatok, szorzási és összeadási szabály

(229-230. oldal)

1. 224.

2.

- a) 120;      b) 91.

3. 100; 40.

4.

- a) 36;      b) 30;      c) 21.



5.

- a) 36;      b) 6;      c) 9;      d) 27;      e) 20.

6.

- a) 6;      b) 54;      c) 54;      d) 6.

7.

- a) 27;      b) 81;      c) 81;      d) 27.

8. 4320; 108.

9. Összesen 5 munkahely van, melyek mindegyike alkalmazhat fiúkat, 3 pedig lányokat is.  $\Rightarrow$  A fiúk mindegyike 5-féle helyen vállalhat munkát, a két lány pedig az első esetben 3-3-féle helyen, a második esetben 3-, illetve 2-féle helyen. Így az első esetben  $5^3 \cdot 3^2 = 1125$ -féleképpen, második esetben  $5^3 \cdot 3 \cdot 2 = 750$ -féleképpen helyezkedhetnek el.

10.

- a) 2;      b) 120;      c)  $\frac{95}{6}$ ;      d) 34;      e)  $\frac{1}{6}$ ;      f) egyszerűsítés után:  $n(n-1) + n + 1 = n^2 + 1$ .

### 3. Variációk (235. oldal)

1.

- a)  $\frac{32!}{27!}$ ;      b)  $32^5$ .

2.  $\frac{32!}{28!}$ .

3.  $32^4$ .

4.  $\frac{32!}{28!} - \frac{28!}{24!}$ , illetve  $\frac{24!}{20!}$ .

5.

- a)  $6^5 - 5^5$ ;  
b)  $4^5$  esetben se 3-as, se 2-es nincs az öt dobás közt  $\Rightarrow 6^5 - 4^5$  esetben lesz 2-es vagy 3-as a dobások közt;  
c) Se 4-es, se 5-ös  $4^5$  esetben lesz  $\Rightarrow$  4-es vagy 5-ös  $6^5 - 4^5$  esetben lesz;  
nincs 4-es  $5^5$  esetben  $\Rightarrow$  van 4-es  $6^5 - 5^5$  esetben;  
hasonlóan: van 5-ös  $6^5 - 5^5$  esetben,  
így a szita-formula alapján  $2 \cdot (6^5 - 5^5) - (6^5 - 4^5) = 2550$  esetben lesz 4-es és 5-ös a dobások közt.

6.  $6^4 - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 936$ .

7.

- a)  $5! = 120$ ;      b)  $4 \cdot 4! = 96$ ;      c)  $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 - 5! = 27096$ ;  
d)  $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 6 + 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 16 = 6720$ ;      e)  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 5712$ .

8.

- a) Az egyes helyiértéken minden lehetséges számjegy  $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ -szer fordul elő  
 $\Rightarrow$  az egyesek összértéke:  $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) = 24 \cdot 25$ .  
 A tízes helyiértéken is minden lehetséges számjegy 24-szer fordul elő  
 $\Rightarrow$  a tízesek összértéke:  $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10 = 24 \cdot 25 \cdot 10$ .  
 Hasonlóan a százások összértéke:  $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 100 = 24 \cdot 25 \cdot 100$ ,  
 az ezreseké:  $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1000 = 24 \cdot 25 \cdot 1000$ ,  
 a tízezreseké:  $24 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 10000 = 24 \cdot 25 \cdot 10000$ .  
 Az ötjegyű számok összege:  $24 \cdot 25 \cdot (1 + 10 + 100 + 1000 + 10000) = 6666600$ .

- b) Az előzőhöz hasonló gondolatmenettel (ügyelve arra, hogy a 0 nem állhat elől):  
 az egyesek összértéke:  $18 \cdot 20$ ,  
 a tízesek összértéke:  $18 \cdot 20 \cdot 10$ ,  
 a százások összértéke:  $18 \cdot 20 \cdot 100$ ,  
 az ezresek összértéke:  $18 \cdot 20 \cdot 1000$ ,  
 a tízezresek összértéke:  $24 \cdot 20 \cdot 10000$ .  
 Az ötjegyű számok összege:  $18 \cdot 20 \cdot 1111 + 24 \cdot 20 \cdot 10000 = 5199960$ .

- c)  $\spadesuit$  Az összes képezhető 5-jegyű szám összege a fenti gondolatmenettel:  
 $2688 \cdot 45 \cdot 1111 + 3024 \cdot 45 \cdot 10000 = 1\,495\,186\,560$ .  
 $\spadesuit$  A csak páratlan számjegyeket tartalmazó 5-jegyű számok összege a) alapján  $6\,666\,600$ .  
 $\spadesuit$  A páros számjegyet tartalmazó 5-jegyű számok összege:  
 $1\,495\,186\,560 - 6\,666\,600 = 1\,488\,519\,960$ .

- d) A feladatnak ez a része már inkább versenyszintű, több odafigyelést igénylő probléma. Nézzük az összeszámlálást!

Először határozzuk meg az utolsó két számjegyből álló „kétjegyű” számok összegét! A lehetséges végződések: 04, 08, 20, 40, 60, 80, valamint 12, 16, 24, 28, 32, 36, 48, 52, 56, 64, 68, 72, 76, 84, 92, 96.

Azon „kétjegyű” számok mindegyike, melyek számjegyei között van 0,  $8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$  darab számban szerepel. Ezek összege  $(4 + 8 + 20 + 40 + 60) \cdot 336 = 44352$ . Azon kétjegyű számok mindegyike, melyek számjegyei között nincs 0,  $7 \cdot 7 \cdot 6 = 294$  darab számban szerepel. Ezek összege  $(12 + 16 + 24 + \dots + 92 + 96) \cdot 294 = 856 \cdot 294 = 251664$ . Így a végződések összege 290016. Ezek után foglalkozunk az első három számjegyből álló számok összegével.

Nézzük meg, hogy azokban a számokban, melyek utolsó két számjegye nem tartalmaz 0-t, hány-szor szerepelnek az egyes számjegyek az első helyen! Kezdjük az 1-sel! Az egyes csak azokban a számokban szerepelhet az első helyen, melyek utolsó két számjegye között nem szerepel. Ilyen végződés 14 db van. Mind a 14 esetben a második helyre 7, a harmadik helyre 6 számjegy közül választhatunk, így az 1-es az első helyen  $14 \cdot 7 \cdot 6$ -szor szerepel. Így ezek összege  $14 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 1$ . Hasonlóan lehet megnézni a többi számjegyet is. Így a tízezresek összege ebben az esetben  $[14 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 9 \cdot (2 + 6) + 12 \cdot (4 + 8)] \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4 = 566 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4$ .



Ehhez hasonlóan kapjuk az ezresek és a százások összegét, ami  $566 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^3$ , illetve  $566 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^2$ . Ezek összege  $566 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 111 = 263869200$ .

Hasonlóan végezhetjük az összeadást azoknál a számoknál, melyek utolsó két számjegye között van nulla.

Az 1-es az első helyen ezek mindegyikében szerepelhet. Mindegyik esetben  $7 \cdot 6$  féleképpen. Így ezek összege  $6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4 \cdot 1$ . Hasonlóan nézhetjük meg a többi számjegyet is, csak ügyelni kell a páros számjegyekre.

A tízezserek összege  $[6 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 4 \cdot (2 + 4 + 6 + 8)] \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4 = 190 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^4$ .

Ehhez hasonlóan kapjuk az ezresek és a százások összegét, ami  $190 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^3$ , illetve  $190 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^2$ .

Ezek összege  $190 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 10^2 \cdot 111 = 88578000$ .

A teljes összeg  $290016 + 263869200 + 88578000 = 352737216$ .

- e) A feladat megoldása hasonló az előzőhöz, csak kevesebb esetvizsgálatot igényel. Először nézzük meg azon számok összegét, melyek 5-re végződnek, majd azokat, melyek 0-ra és adjuk össze a kapott értékeket!

A feladatnak megfelelő 5-re végződő számok száma  $8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 2688$ . A végződéseik összege  $2688 \cdot 5 = 13440$ . Az első helyre az ötös és a 0, a többi helyre az 5-ös nem kerülhet. Így az eddigi gondolatmenetek alapján a tízezserek, ezresek, százások és tízesek összegének az összege  $(1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 7 \cdot 6 \cdot (8 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1) = 147453600$ .

A 0-ra végződő számok összege. Itt egyszerű a helyzet, mert a 0 végén van, így azzal nem kell külön foglalkozni. Az eddigi gondolatmenetek alapján a tízezserek, ezresek, százások és tízesek összegének az összege  $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 11110 = 167983200$ . Így a keresett összeg  $315436800$ .

9.  $2^6 = 64$ -féleképpen írhatók be a műveleti jelek a számok közé, de csak 26-féle különböző eredményt kaphatunk.

A legkisebb eredmény  $-26$ , a legnagyobb  $28$ .

Az eredmény lehet  $0$ , de nem lehet  $3$ .

10.  $n = 36$ .

#### 4. Permutációk, kombinációk (242. oldal)

1.  $5! = 120$  db; 4-gyel osztható: 24 db.

2.

a)  $8! = 40\,320$ ;    b)  $4! \cdot 2^4 = 384$ ;    c)  $2 \cdot 4! = 48$ .

3.  $\frac{8!}{8} : 2 = 2520$ .

4.  $\frac{8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2}{8 \cdot 2} = 24$ .

5. Összesen  $\frac{8!}{3! \cdot 4!} = 280$  permutáció;

$$8\text{-jegyű számok száma: } \frac{7!}{3! \cdot 4!} + \frac{7!}{3! \cdot 3!} = 175;$$

6-tal osztható 8-jegyű számok száma ötöde a 8-jegyűek számának.

6.  $\frac{10!}{4! \cdot 2! \cdot 2!} = 37\,800.$

7.  $\binom{30}{4} = 27\,405.$

8.

a)  $\binom{45}{6} = 8\,145\,060;$  b)  $\binom{90}{5} = 43\,949\,268.$

9. Bármely számötösnek csak egy olyan permutációja van, melyben a számjegyek csökkenő sorrendben követik egymást  $\Rightarrow$  a keresett 5-jegyű számok száma:  $\binom{9}{5} = 126.$

10. Az összes 5-jegyű száma:  $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15\,120$ , a csökkenő jegyűeké 126, így a nem csökkenő jegyűeké  $15\,120 - 126 = 14\,994.$

11. Az  $n$  elemű halmazból az első elemet  $n$ -féleképpen, a másodikat  $(n-1)$ -féleképpen, a  $k$ -adikat pedig  $(n-k+1)$ -féleképpen választhatjuk ki, azaz összesen  $\frac{n!}{(n-k)!}$ -féle módon. Mivel azonban a kiválasztott elemek sorrendje nem számít, ezért az előbbi eredményt osztani kell azok lehetséges sorrendjeinek számával, így egy  $n$  elemű halmaz  $k$  elemű részhalmazainak száma  $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$

## 5. Vegyes feladatok a kombinatorika köréből (245-246. oldal)

1. 72; 60.

2. 12.

3. 270; 130.

4. 2400.

5. 426; közelítőleg 0,00097%.

6. 1728.

7. 5760.

$$8. \binom{13}{3} \cdot \binom{18}{5} = 2\,450\,448.$$

9.

$$a) \binom{4}{1} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{20}{2} = 18\,240;$$

$$b) \binom{24}{6} + \binom{8}{1} \cdot \binom{24}{5} + \binom{8}{2} \cdot \binom{24}{4} + \binom{8}{3} \cdot \binom{24}{3};$$

$$c) \text{összes eset: } \binom{32}{6}, \text{ rossz eset (se piros, se zöld): } \binom{16}{6} \Rightarrow \text{jó eset (piros vagy zöld): } \binom{32}{6} - \binom{16}{6};$$

$$d) \text{van piros vagy zöld: } \binom{32}{6} - \binom{16}{6},$$

$$\text{van piros: } \binom{32}{6} - \binom{24}{6},$$

$$\text{van zöld: } \binom{32}{6} - \binom{24}{6}$$

$$\Rightarrow \text{van piros és zöld: } 2 \cdot \left[ \binom{32}{6} - \binom{24}{6} \right] - \left[ \binom{32}{6} - \binom{16}{6} \right].$$

10.

$$a) 3^{14};$$

b) csak egy szint használ: 3 eset,

$$\text{pontosan két szint használ: } 3 \cdot (2^{14} - 2) \text{ eset}$$

$$\Rightarrow \text{három szint használ: } 3^{14} - 3 - 3 \cdot (2^{14} - 2) = 4\,733\,820.$$

$$11. \binom{30}{6} \cdot \binom{24}{6} \cdot \binom{18}{6} \cdot \binom{12}{6}.$$

$$12. \binom{\frac{30!}{6! \cdot 24!}}{4} = \binom{593\,775}{4}.$$

13.

$$a) \binom{20}{2}; \quad b) \binom{20}{3}; \quad c) \binom{20}{4}.$$

14. A legtöbb metszéspont akkor keletkezik, ha bármely metszésponton pontosan két átló halad keresztül. Így minden metszésponthez két átló tartozik és viszont. Az is nyilvánvaló, hogy két átló egyértelműen meghatároz egy négyszöget. Így bármely metszésponthez egy négyszög, és bármely négyszöghöz egy metszéspont tartozik. Tehát a húszszög csúcsaiból kiválasztható négyszögek száma megegyezik a maximális metszéspontok számával. Így a keresett érték

$$\binom{20}{4} = 4845.$$

15.

- a) 27;    b) 25;    c) 20.

**6. Valószínűségi kísérletek, a valószínűség szemléletes fogalma (253. oldal)**

1.

- a)  $\frac{1}{32}$ ;    b)  $\frac{5}{16}$ .

2.  $\frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$ .

3.  $\frac{3! \cdot 2}{5!} = \frac{1}{10}$ .

4.  $T = \{(0;1); (0;2); (0;3); (1;0); (1;2); (1;3); (2;0); (2;1); (2;3); (3;0); (3;1); (3;2)\};$   
 $P(A) = \frac{1}{4}$ .

5.

- a)  $\frac{1}{4}$ ;    b)  $\frac{5}{18}$ ;    c)  $\frac{13}{18}$ ;    d)  $\frac{16}{81}$ ;

e) Komplementer esemény: van 2-es és van 3-as

★ se 2-es, se 3-as:  $4^4$  elemi esemény  $\Rightarrow$  van 2-es vagy 3-as:  $6^4 - 4^4$  elemi esemény;

★ nincs 2-es:  $5^4$  elemi esemény  $\Rightarrow$  van 2-es:  $6^4 - 5^4$  elemi esemény;

★ nincs 3-as:  $5^4$  elemi esemény  $\Rightarrow$  van 2-es:  $6^4 - 5^4$  elemi esemény;

$\Rightarrow$  van 2-es és van 3-as:  $2 \cdot (6^4 - 5^4) - (6^4 - 4^4)$  elemi esemény;

$\Rightarrow$  nincs 2-es vagy nincs 3-as:  $6^4 - (2 \cdot (6^4 - 5^4) - (6^4 - 4^4)) = 2 \cdot 5^4 - 4^4$  elemi esemény;

$\Rightarrow$  a keresett valószínűség:  $\frac{2 \cdot 5^4 - 4^4}{6^4} = \frac{497}{648}$ .

6.  $\frac{\binom{25}{2} \cdot \binom{35}{3}}{\binom{60}{5}}$ .

7.

- a)  $\frac{1}{43\,949\,268}$ ;    b)  $\frac{426}{43\,949\,268}$ ;    c)  $\frac{12\,326}{43\,949\,268}$ .

8.  $\frac{3}{10}$ .