Végeredmények, feladatok részletes megoldása

1. Sorba rendezési problémák (Ismétlés)

1.
a) $5! = 120$
b) $3! = 6$ (Ha csak a megérkezés számít.)
$3! \cdot 2! \cdot 2! = 24$ (Ha az is számít, hogy hányféle sorrendben lépte át az ajtót az öt ember.)

2.
a) $4! = 24$; b) $2! \cdot 2! \cdot 2! = 8$

3.
a) $5! = 120$; b) $2 \cdot 4! = 48$

4. 0-ra végződő számok száma $5! = 120$
5-re végződő számok száma $4 \cdot 4! = 96$
Összesen: 216
1, 2, 3 egymás mellett szerepel:
0-ra végződők száma $3! \cdot 3! = 36$
5-re végződők száma $2 \cdot 2 \cdot 3! = 24$
Összesen: 60

5. kilencjegyű szám: $\dfrac{9!}{2!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!} = 7560$

12-vel osztható: $\dfrac{7!}{2!\cdot 3!} + \dfrac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} + \dfrac{7!}{2!\cdot 3!} + \dfrac{7!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} = 2100$ (A 4-gyel való oszthatóságot elég vizsgálni.)

6. kilencjegyű szám: $\dfrac{8!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!} + \dfrac{8!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!} + \dfrac{8!}{1!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 3!} = 5040$ (Az első helyen 1,2 vagy 3 állhat.)

12-vel osztható: $3 \cdot \dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} + \dfrac{6!}{3!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 2!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 2!\cdot 2!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 2!} + \dfrac{6!}{3!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} + \dfrac{6!}{2!\cdot 3!} = 1470$

7.
a) $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27\,216$
b) $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$
c) $27\,216 - 720 = 26\,496$
d) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 5880$
e) $27\,216 - 5880 = 21\,336$
f) $2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 21\,000$ (A szitaformula alkalmazása.)
g) $2 \cdot (27216 - 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5) - 21\,336 = 6216$

8.
a) 90 000; b) 7776; c) 82 224; d) 28 672; e) 61 328; f) 76 304; g) 13 696

9.
a) $\binom{4}{1} \cdot \binom{28}{5} \cdot 6! = 283\,046\,400$
b) $28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 271\,252\,800$
c) $24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 96\,909\,120$

10.

a) $4 \cdot 28^5 \cdot 6 = 413\,048\,832$
b) $28^6 = 481\,890\,304$
c) $24^6 = 191\,102\,976$

11.

a) $6^5 = 7776$
b) $6^5 - 3^5 = 7533$ (Legalább egy dobás páros.)
c) $6^5 - 3^5 = 7533$
d) 6
e) 6^3 (Palindromszámok.)
f) $3 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 9 = 972$

2. Részhalmaz-kiválasztási problémák, vegyes összeszámlálási feladatok (Ismétlés)

1. $\binom{30}{4} = 27\,405$

2.

a) $\binom{20}{3} = 1140$; b) $\binom{20}{4} = 4845$

3.

a) $\binom{10}{2}\binom{8}{1} + \binom{8}{2}\binom{10}{1} = 640$; b) $\binom{10}{2}\binom{8}{2} = 1260$

4. $\binom{32}{5} = 201\,376$

5.

a) $\binom{8}{2}\binom{24}{3} = 56\,672$; b) $\binom{8}{3}\binom{24}{2} + \binom{8}{4}\binom{24}{1} + \binom{8}{5} = 17\,192$

6. $\binom{4}{2}\binom{4}{1}\binom{24}{3} = 48\,576$

7. $\binom{32}{8}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = \dfrac{32!}{8! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 8!} \approx 9{,}956 \cdot 10^{16}$

8. $\binom{4}{1}\binom{4}{4}\binom{28}{4}\binom{24}{8}\binom{16}{8}\binom{8}{8} = \dfrac{4 \cdot 28!}{4! \cdot 8! \cdot 8! \cdot 8!} \approx 7{,}752 \cdot 10^{14}$

9.

a) $\binom{4}{2}\binom{3}{3}\cdot 5! = 720$; b) $\left(\binom{4}{2}\binom{3}{3}+\binom{4}{3}\binom{3}{2}+\binom{4}{4}\binom{3}{1}\right)\cdot 5! = 2520$

10.

a) $3!\cdot 5! = 720$; b) $3!\cdot 4!\cdot\binom{5}{3} = 1440$

11.

a) $\binom{6}{2}\cdot 3^6 = 10\,935$; b) $\left(\binom{6}{3}+\binom{6}{4}+\binom{6}{5}+\binom{6}{6}\right)\cdot 3^6 = 30\,618$; c) $1+\binom{6}{1}+\binom{6}{1}+\binom{6}{2} = 28$

3. Binomiális együtthatók, Pascal-háromszög

1. $\binom{12}{6} = 924$

2. $2^7 = 128$

3. $\binom{10}{6} = 210$

4. $2^8 = 256$

5.

a) $(x+1)^5 = \binom{5}{0}\cdot x^5\cdot 1^0 + \binom{5}{1}\cdot x^4\cdot 1^1 + \binom{5}{2}\cdot x^3\cdot 1^2 + \binom{5}{3}\cdot x^2\cdot 1^3 + \binom{5}{4}\cdot x^1\cdot 1^4 + \binom{5}{5}\cdot x^0\cdot 1^5 =$

$= x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

b) $(a-2)^4 = \binom{4}{0}\cdot a^4\cdot(-2)^0 + \binom{4}{1}\cdot a^3\cdot(-2)^1 + \binom{4}{2}\cdot a^2\cdot(-2)^2 + \binom{4}{3}\cdot a^1\cdot(-2)^3 + \binom{4}{4}\cdot a^0\cdot(-2)^4 =$

$= a^4 - 8a^3 + 24a^2 - 32a + 16$

c) $(a+b)^6 =$

$\binom{6}{0}\cdot a^6\cdot b^0 + \binom{6}{1}\cdot a^5\cdot b^1 + \binom{6}{2}\cdot a^4\cdot b^2 + \binom{6}{3}\cdot a^3\cdot b^3 + \binom{6}{4}\cdot a^2\cdot b^4 + \binom{6}{5}\cdot a^1\cdot b^5 + \binom{6}{6}\cdot a^0\cdot b^6$

$= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$

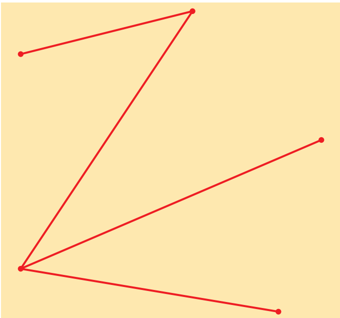
d) $(x-1)^6 =$

$\binom{6}{0}\cdot x^6\cdot(-1)^0 + \binom{6}{1}\cdot x^5\cdot(-1)^1 + \binom{6}{2}\cdot x^4\cdot(-1)^2 + \binom{6}{3}\cdot x^3\cdot(-1)^3 + \binom{6}{4}\cdot x^2\cdot(-1)^4 + \binom{6}{5}\cdot x^1\cdot(-1)^5 +$

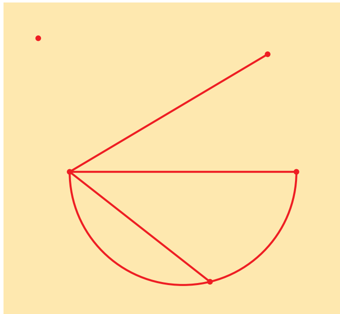
$+\binom{6}{6}\cdot x^0\cdot(-1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$

4. Gráfelméleti alapismeretek

1. 4.1. ábra



4.1. ábra



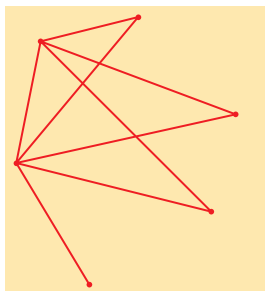
4.2. ábra

2. Igen, például 4.2. ábra.

3. Nem, mert ha az egyik embernek négy ismerőse van, akkor az összes többi embert ismeri, így viszont nem lehet olyan, akinek egy ismerőse sincsen.

4.

a) Nem, mert a fokszámok összege páratlan.
b) Nem, mert 0 és 5 fokszám nem lehet egyszerre.
c) Nem, mert két 1-es és 5-ös és 4-es fokszámú csúcsok nem lehetnek egyszerre.
d) Igen, például 4.4. d) ábra



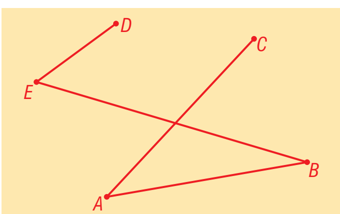
4.4. d) ábra

5. $\frac{10 \cdot 9}{2} = 45$

6. $\frac{13 \cdot 12}{2} - 42 = 36$

7.

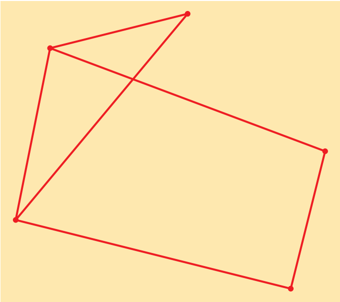
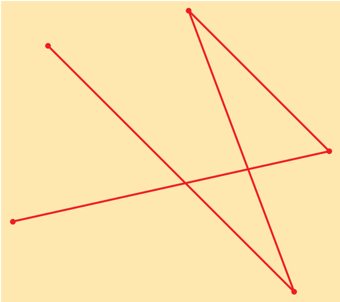
a) 4.7. a) ábra



4.7. a) ábra

b) $\frac{5 \cdot 4}{2} - 4 = 6$

c) Még 2-t, ha Dénest és Elemért is megveri (egy eset).
1,5-t, ha egyszer nyer és egyszer döntetlent játszik (két eset).
1-et, ha két döntetlent játszik, vagy egyszer nyer és egyszer veszít (három eset).
0,5 pontot, ha egyszer döntetlent játszik és egyszer veszít (két eset).
0 pontot, ha kétszer veszít (egy eset).

8. a gráf:  komplementer gráfja: 

9. Igaz.

10. Hárman.

1. Az egész kitevőjű hatvány és az *n*-edik gyök (Ismétlés)

1.

a) 121; b) 4; c) 12; d) 3; e) 512

2.

a) az első a nagyobb (ennek értéke 10^9, míg a másodiké 10^{-1})
b) az első a nagyobb (ennek értéke 49, míg a másodiké 4)

3.

a) a^2b^3; b) ab^2c; c) y^{19}; d) 2; e) $\dfrac{b^2}{a}$

4.

a) 3; b) –2; c) $\dfrac{5}{2}$ d) 0,1; e) 10; f) $\dfrac{2}{3}$; g) 0

5.

a) 3; b) 2; c) 2; d) 3; e) 2; f) 3; g) 2; h) 25; i) 8; j) 4

6.

a) $\sqrt[6]{3}=\sqrt[12]{9}>\sqrt[12]{8}=\sqrt[4]{2}$; b) $\sqrt[9]{5}=\sqrt[18]{25}<\sqrt[18]{27}=\sqrt[6]{3}$; c) $\sqrt[8]{\dfrac{3}{2}}=\sqrt[24]{\dfrac{27}{8}}=\sqrt[24]{3,375}<\sqrt[24]{4}=\sqrt[12]{2}$

7.

a) $\sqrt[12]{a^7}$; b) $\sqrt[6]{12}$; c) $\sqrt[18]{3^{11}}$; d) $\sqrt[60]{x^{101}}$

2. A törtkitevőjű hatványok

1.

a) 5; b) 27; c) 32; d) 16; e) 343; f) 8; g) $\dfrac{2}{3}$; h) $\dfrac{9}{49}$; i) 1000;
j) $10^{\frac{12}{5}}$; k) 0,01; l) $\dfrac{1}{2}$

2. a) $6^{\frac{1}{6}}$; b) $12^{\frac{2}{7}}$; c) $7^{\frac{5}{3}}$; d) $3^{-\frac{5}{4}}$; e) $11^{-\frac{3}{4}}$; f) $13^{-\frac{4}{5}}$; g) $21^{-\frac{9}{2}}$

3. a) $3^{\frac{7}{6}}$; b) $3^{\frac{29}{24}}$; c) $3^{\frac{37}{12}}$; d) $3^{\frac{47}{30}}$

4. a) $x^{\frac{109}{60}}$; b) $y^{\frac{23}{12}}$; c) $a^{\frac{10}{3}}$; d) b; e) $21+4c^{\frac{3}{2}}$; f) $-12d^{\frac{5}{2}}-192$; g) d^2-27; h) a^4+8

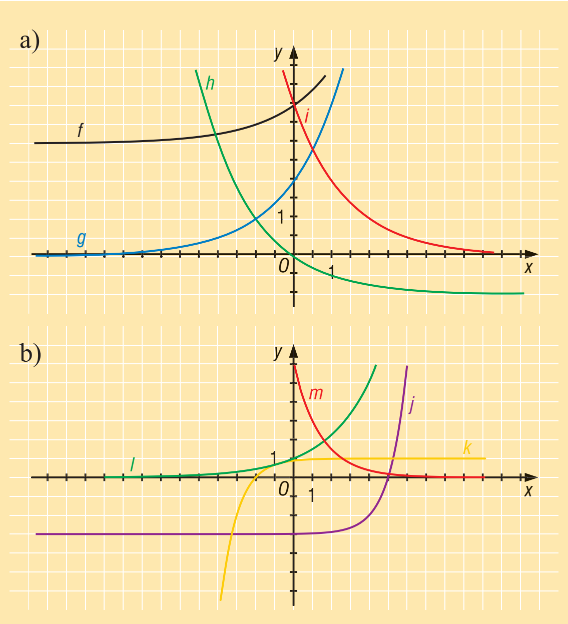
5. a) $x^0=1$; b) $x^{\frac{7}{6}}$; c) $x^{-\frac{15}{8}}$

3. Az irracionális kitevőjű hatvány, az exponenciális függvény

1.

a) 64; b) 75%-kal

2. 3.2. ábra



3.2. ábra a) Az *f*, *g*, *h*, *i* függvények grafikonja; b) A *j*, *k*, *l*, *m* függvények grafikonja

4. Exponenciális egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek

1.

a) $\frac{13}{3}$; b) $\frac{7}{30}$; c) $\frac{41}{9}$; d) $\frac{1}{12}$

2.

a) –7; b) $\frac{7}{4}$; c) 2; d) $\frac{3}{2}$

3.

a) 1

b) Az egyenletnek nincs megoldása az egész számok halmazán (sőt a valós számok halmazán sincs).

4.

a) –2 és 1; b) –2; c) 2 és 3

5.

a) $x = 2$ és $y = 1$; b) $x = 1$ és $y = 1$; c) Az egyenletrendszernek nincs megoldása a valós számpárok halmazán.

6.

a) $x > -\frac{13}{4}$; b) $x \le -\frac{7}{2}$; c) $x \le 1$ vagy $x \ge 4$; d) $-5 \le x < -2$

5. A logaritmus definíciója, a logaritmusfüggvény

1.

a) 4; b) 2; c) –3; d) nem racionális szám;

e) –5; f) –3; g) $\frac{3}{2}$; h) $\frac{2}{3}$;

i) $-\frac{1}{4}$; j) $-\frac{5}{2}$; k) $\frac{4}{3}$; l) $-\frac{3}{5}$

2.

a) 5; b) 0,32; c) 5; d) $\frac{16}{5}$; e) $\frac{2}{3}$;

f) 1,05; g) 1,05; h) 4; i) 64; j) 100;

k) 4; l) 6; m) $\left(\frac{1}{84}\right)^4 = \frac{1}{49787136}$; n) $8^3 = 512$; o) $27^3 + 8 - 40 = 19\,651$

3.

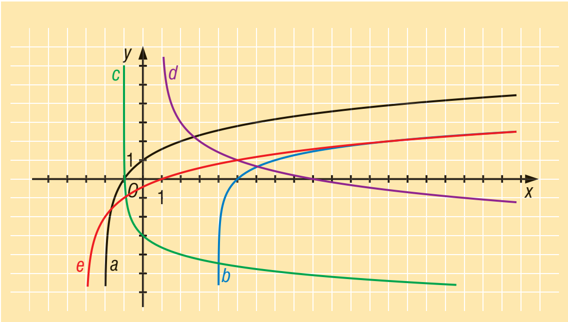
a) $\left]\frac{7}{2};\infty\right[$; b) $]-\infty;5[$; c) $\left]\frac{5}{2};\frac{18}{5}\right[\setminus \{3\}$; d) $\left]-\frac{5}{3};\infty\right[\setminus \left\{-\frac{4}{3}\right\}$;

e) $]-\infty;1[\, \cup\,]3;\infty[$; f) $\left]-4;\frac{1}{3}\right[$; g) $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{26}{11}\right\}$;

h) $]4;7[$; i) $\left]-\frac{7}{2};6\right[$; j) $]-\infty;-7[\, \cup \left]-\frac{12}{5};\infty\right[$

4. 5.4. ábra

a) $]-2;\infty[$
b) $]4;\infty[$
c) $]-1;\infty[$
d) $]1;\infty[$
e) $]-3;\infty[$



5.4. ábra

6. A logaritmus azonosságai

1.

a) 2; b) 3; c) 3; d) 3

2.

a) 10; b) $\frac{2}{5}$; c) a; d) b

3.

a) 1; b) $\frac{1}{2}$; c) -1; d) 1; e) 0

7. Logaritmikus egyenletek, egyenletrendszerek és egyenlőtlenségek

1.

a) $-\frac{5}{2}$; b) $-\frac{10}{3}$; c) 6; d) $\frac{15}{13}$; e) 4; f) 6; g) 14; h) 2

2.

a) $\frac{3}{2}$; b) $\frac{3}{2}$; c) 25 és $\frac{\sqrt{5}}{5}$; d) 0,1 és 0,001

3.

a) 2; b) 25; c) 49; d) 9 és $\frac{1}{3}$; e) 16 és $\sqrt[3]{4}$

4.

a) $x = 8$ és $y = 81$; b) $x = 10$ és $y = 0{,}1$; c) $x = \sqrt{\frac{27}{35}}$ és $y = \sqrt{\frac{3}{35}}$; d) $x = 5$ és $y = 1$

5.

a) $-\frac{11}{2} < x < \frac{1}{3}$; b) $\frac{11}{2} < x < 16$; c) $3 < x < \frac{9}{2}$; d) $\frac{1}{2} < x < 2$

1. A trigonometriáról tanultak ismétlése

1.

a) $288\sqrt{2}\ \text{cm}^2 \approx 407{,}29\ \text{cm}^2$; b) $96\sqrt{2-\sqrt{2}}\ \text{cm} \approx 73{,}48\ \text{cm}$; c) $6\sqrt{4-2\sqrt{2}}\ \text{cm} \approx 6{,}49\ \text{cm}$;

2.

a) $951{,}46\ \text{m}^3$; b) $74{,}67°$

3. $\dfrac{4}{5}$ vagy $-\dfrac{4}{5}$

4. $\dfrac{289}{120}$ vagy $-\dfrac{289}{120}$

5. $\dfrac{21}{50}$

6. $\dfrac{17}{13}$ vagy $-\dfrac{17}{13}$

7.

a) A $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$-t $\sin\alpha$–val (pótszögek szögfüggvényeire vonatkozó azonosság), $\cos(\alpha+\pi)$ – t ($\cos\alpha$)-val helyettesítve, $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$-t kapunk, ahonnan $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

b) A $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$– t $\operatorname{tg}\alpha$ – val helyettesítve, $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ -t kapunk. Ezt $\cos^2\alpha$-val beszorozva $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$-t kapunk.

c) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1$ a $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\operatorname{ctg}\alpha$ $\left(\alpha \neq \dfrac{\pi}{2}k,\ k\in\mathbb{Z}\right)$ azonosság alapján

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha\cdot\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1$ a $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha = 1$ azonosság szerint

$\dfrac{1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = \dfrac{2}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-1$ $/\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(1-\operatorname{tg}^2\alpha)$ $\left(\alpha\neq k\dfrac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}\right)$

$1-\operatorname{tg}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - \left(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(1-\operatorname{tg}^2\alpha\right)$

$1-\operatorname{tg}^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$

$1-\operatorname{tg}^2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$ az $1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ azonosság alapján

$\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha = -\sin^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\alpha$ a $\operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$ alapján

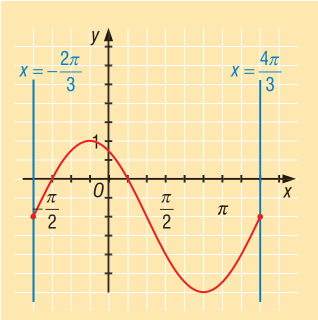
$\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha\cdot(\cos^2\alpha-1) = -\sin^4\alpha$

$-\sin^4\alpha = -\sin^4\alpha$

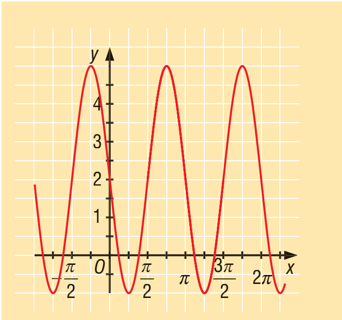
8. 1.8. a), b), c), d) ábrák

a)



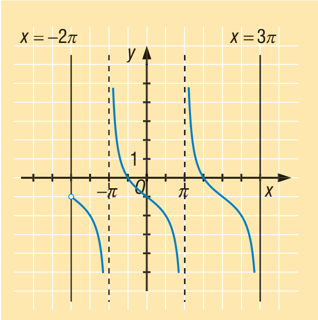
1.8. a) ábra Az *f* függvény grafikonja

b)



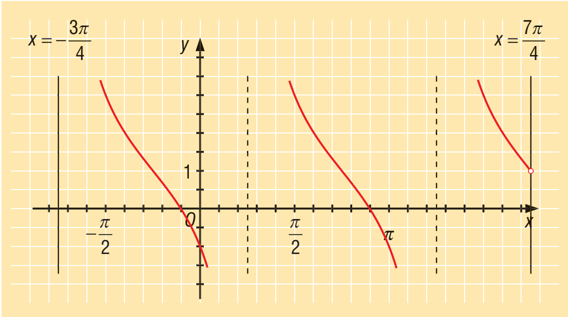
1.8. b) ábra A *g* függvény grafikonja

c)



1.8. c) ábra A *h* függvény grafikonja

d)



1.8. d) ábra Az *i* függvény grafikonja

2. Trigonometrikus egyenletek I.

1.

a) $\frac{13\pi}{30}+\frac{2k\pi}{3}$ $(k\in\mathbb{Z})$

b) $\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2l\pi,\ \frac{7\pi}{6}+2m\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2n\pi$ $(k,\ l,\ m,\ n\in\mathbb{Z})$;

rövidebben: $\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{5\pi}{6}+l\pi$ $(k,l\in\mathbb{Z})$

c) $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{3\pi}{4}+l\pi$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$; rövidebben: $\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$

d) $\frac{\pi}{2}+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

2.

a) $-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \frac{l\pi}{3}$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$

b) $\frac{\pi}{8}+k\pi,\ \frac{3\pi}{8}+l\pi,\ \frac{5\pi}{8}+m\pi,\ \frac{7\pi}{8}+n\pi\ \ (k, l, m, n \in \mathbb{Z})$;

rövidebben: $\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\ \ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \frac{7\pi}{12}+l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$; rövidebben: $\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $x \approx 0{,}1159+\frac{k\pi}{4}\ (k \in \mathbb{Z})$

3.

a) $\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{7\pi}{12}+\frac{2l\pi}{3}\ \ (k, l \in \mathbb{Z})$

b) $\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ -\frac{\pi}{18}+\frac{2l\pi}{3}\ (k, l \in \mathbb{Z})$

c) $-\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}\ (k \in \mathbb{Z})$

d) $-\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\ \ (k \in \mathbb{Z})$

4.

a) $-\frac{\pi}{6}-k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$

b) $-\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{12}+l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$

c) $-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ -\frac{5\pi}{12}+\frac{2l\pi}{3}\ (k, l \in \mathbb{Z})$

d) $\frac{9\pi}{10}-k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

3. Trigonometrikus egyenletek II.

1.

a) $\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2l\pi,\ \frac{7\pi}{6}+2m\pi,\ \frac{11\pi}{6}+2n\pi\ (k, l, m, n \in \mathbb{Z})$;

rövidebben: $\frac{\pi}{6}+k\pi,\ \frac{5\pi}{6}+l\pi\ (k, l \in \mathbb{Z})$

b) $\frac{5\pi}{3}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

c) $\frac{\pi}{4}+k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$

2.

a) $\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ \frac{\pi}{6}+2l\pi,\ \frac{5\pi}{6}+2m\pi\ \ (k,l,m,\in\mathbb{Z})$

b) $x\approx-0,3584+2k\pi,\ \ x\approx3,5000+2l\pi\ (k,l\in\mathbb{Z})$

c) $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ x\approx2,1588+l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$

d) $x\approx1,1437+2k\pi,\ x\approx5,1395+2l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$

3.

a) **1. megoldás:**
Szorzattá alakítjuk: $(3\sin x - \cos x)(\sin x - \cos x) = 0$
2. megoldás:
Osszuk el az egyenlet két oldalát $\cos^2 x$-szel, így $3\mathrm{tg}^2 x - 4\ \mathrm{tg}\ x + 1 = 0$ egyenletet kapjuk!
3. megoldás:
Oldjuk meg az egyenletet $\sin x$-re, s tekintsük a $\cos x$-et paraméternek!
Megoldás: $\frac{\pi}{4}+k\pi,\ x\approx0,3217+l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$

b) **1. megoldás:**
Szorozzuk be az egyenlet két oldalát $\frac{\sqrt{2}}{2}$-vel, így $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=-\frac{1}{2}$-t kapunk. A baloldal az addíciós tételek miatt $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, ahonnan $x+\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{6}+2k\pi$ és $x+\frac{\pi}{4}=\frac{11\pi}{6}+2l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$.
Így $x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi$ és $x=\frac{19\pi}{12}+2l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$.

2. megoldás:
Emeljük mindkét oldalt négyzetre! (Vigyázat ez nem ekvivalens átalakítás!)

$$\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin x\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\sin 2x=-\frac{1}{2}$$

Ahonnan: $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$ vagy $x=\frac{11\pi}{12}+l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$.
A $[0;\ 2\pi]$ –on belüli megoldásokat visszahelyettesítve, csak két eset marad x-re:
$x=\frac{11\pi}{12}+2k\pi$ és $x=\frac{19\pi}{12}+2l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$.

3. megoldás:
Emeljük az egyenlet mindkét oldalát négyzetre, s szorozzunk be kettővel:

$$2\sin^2 x+4\sin x\cos x+2\cos^2 x=1$$

A jobb oldalt helyettesítsük $\sin^2 x+\cos^2 x$-szel! Majd osszunk el mindkét oldalt $\cos^2 x$-szel!
A kapott egyenlet $\mathrm{tg}\,x$-re nézve másodfokú, amit a másodfokú egyenlet megoldóképletével oldhatunk meg.

4.

a) $2k\pi,\ \dfrac{3\pi}{2}+2l\pi\ \ (k,l\in\mathbb{Z})$

b) Nincs valós megoldás.

4. Trigonometrikus egyenlőtlenségek (Kiegészítő, emelt szintű tananyag)

1.

a) $\left[\dfrac{\pi}{6}+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{2}+l\pi;\dfrac{5\pi}{6}+l\pi\right]\ (k,l\in\mathbb{Z})$

b) $\left[-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\dfrac{\pi}{4}+k\pi\right]\ (k\in\mathbb{Z})$

c) $\left]\pi+k\pi;\dfrac{7\pi}{4}+k\pi\right[\ \ (k\in\mathbb{Z})$

2.

a) $\left[k\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}\right]\ \ (k\in\mathbb{Z})$

b) $\left[-\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{2}\right]\ \ (k\in\mathbb{Z})$

c) $\left[-\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\pi\right]\ \ (k\in\mathbb{Z})$

3.

a) $[2k\pi;\pi+2k\pi]\ \ (k\in\mathbb{Z})$

b) $\left[\dfrac{k\pi}{2};\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\right[\ \ (k\in\mathbb{Z})$

4.

a) $\left]\dfrac{\pi}{4}+2k\pi;\dfrac{7\pi}{4}+2k\pi\right[\setminus\left\{\dfrac{3\pi}{2}+2k\pi\right\}\ \ (k\in\mathbb{Z})$

b) $\left]-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi;\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right[\ \ (k\in\mathbb{Z})$

c) $[2k\pi;\pi+2k\pi]\ (k\in\mathbb{Z})$

d) $]k\pi;\ 0{,}4636+k\pi]\cup\left[1{,}1071+k\pi;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[\ \ (k\in\mathbb{Z})$

5. Skaláris szorzat

1.

a) 0; b) $-\frac{3}{2}$; c) $-\frac{3}{2}$; d) 2

2.

a) 105°; b) 90°; c) 118,24°

3. A legnagyobb szög (két tizedes jegyre kerekítve): 112,62°
A legkisebb szög (két tizedes jegyre kerekítve): 64,98°

4.

a) $\cos 75° = \cos(30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \sin 30° \cdot \sin 45° = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

b) $\sin 75° = \sin(30° + 45°) = \sin 30° \cdot \cos 45° + \cos 30° \cdot \sin 45° = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

c) $\operatorname{tg} 75° = \frac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ}=\frac{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}=\frac{8+4\sqrt{3}}{4}=2+\sqrt{3}$

d) $\operatorname{ctg} 75° = \frac{1}{\operatorname{tg}75^\circ}=\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}=2-\sqrt{3}$

5.

a) $\cos 2\alpha = \cos(\alpha+\alpha) = \cos\alpha\cdot\cos\alpha - \sin\alpha\cdot\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
b) $\sin 2\alpha = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos\alpha\cdot\sin\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

c) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} =$

$= \frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$

d) $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)} = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}{\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}} =$

$\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$

e) $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha+\alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Az itt bizonyított azonosságok csak abban az esetben érvényesek, ha a bennük szereplő szögfüggvények értelmezve vannak.

6. Összefüggések a háromszög oldalai és szögei között

1.

a) hegyesszögű
b) tompaszögű
c) hegyesszögű
d) Nem létezik ilyen háromszög.

2. A trapéz szögei (két tizedes jegyre kerekítve): 53,13°, 73,74°, 126,87°, 106,26°.

A trapéz területe: 9 cm^2

3. $a \approx 21{,}63$ cm, $b \approx 25{,}63$ cm, $c = 15$ cm, $\alpha \approx 57{,}43°$, $\beta \approx 86{,}82°$, $\gamma \approx 35{,}75°$. $T \approx 162$ cm^2.

4. Két ilyen paralelogramma létezik. Az elsőben a hiányzó oldal hossza, és területe: 3,82 cm és 21,04 cm^2. A másikban 15,34 cm és 84,37 cm^2.

5. A hiányzó oldalak hossza: 9,61 dm és 30,13 dm. A háromszög szögei: 17,81°, 55,98°, 106,21°.

6. A háromszög oldalai: 12, 20 és 28 egység. A háromszög szögei: 38,21°, 21,79°, 120°.

1. Vektorok a koordinátasíkon

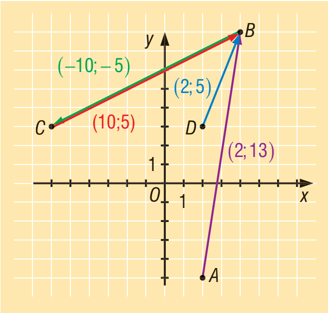
1.

a) $\vec{a}\,(2;-5)$, $\vec{b}\,(4;8)$, $\vec{c}\,(-6;3)$, $\vec{d}\,(2;3)$

b) $\vec{a}+\vec{b}\,(6;3)$, $\vec{a}+\vec{c}+\vec{d}\,(-2;1)$, $\vec{c}-\vec{a}\,(-8;8)$, $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\,(-8;-10)$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}\,(2;9)$

$-\frac{1}{3}\vec{c}\,(2;-1)$, $3\vec{a}+\vec{c}-2\vec{d}\,(-4;-18)$, $5\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\,(0;0)$

c) 1.1. c) ábra $\overrightarrow{AB}(2;13)$, $\overrightarrow{DB}(2;5)$, $\overrightarrow{BC}(-10;-5)$, $\overrightarrow{CB}(10;5)$



1.1. c) ábra

2. A (–3;8), B (–8;–3), C(3;–8), D(8;3)

A négyzet területe: 146 területegység, kerülete: $4\sqrt{146}$ egység.

3. A(–2;–2), B(1;–11), C(10;–8), D(7;1)

A négyzet kerülete: $12\sqrt{10}$ egység, területe: 90 t.e.

4. Négy ilyen téglalap van.
Első esetben (AB a rövidebbik oldal) a két hiányzó csúcs: C(14;5), D(11;9).
Második esetben (AB a rövidebbik oldal) a két hiányzó csúcs: C(–5;–3), D(–2;–7).
Harmadik esetben (AB a hosszabbik oldal) a két hiányzó csúcs: $C(8;\frac{1}{2})$, $D(5;\frac{9}{2})$.
Negyedik esetben (AB a hosszabbik oldal) a két hiányzó csúcs: $C(4;-\frac{5}{2})$, $D(1;\frac{3}{2})$.
Az első és a második esetben a kerület 30 egység, a terület 50 t.e.
A harmadik és negyedik esetben a kerület 15 egység, a terület 12,5 t.e.

5.

a) Kerülete $\sqrt{130}+\sqrt{45}+\sqrt{109}\approx 28{,}55$ egység, területe 34,5 t.e. (Héron-képlettel számolva: 34,58).

b) Kerülete $\sqrt{157}+\sqrt{41}+\sqrt{40}\approx 25{,}26$ egység, területe 7 t.e. (Héron-képlettel számolva: 6,86).

2. Tájékozódás a koordináta-rendszerben

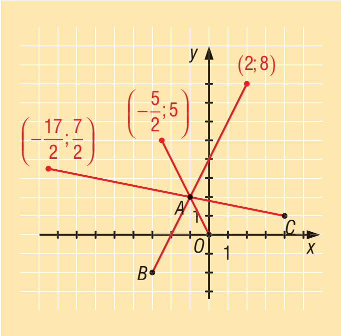
1. Az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ vektorok párhuzamosak.

2. Az $\vec{a}$ és $\vec{c}$ illetve a $\vec{b}$ és $\vec{f}$ vektorok párhuzamosak. Az $\vec{a}$ és $\vec{c}$-re merőleges a $\vec{b}$ és az $\vec{f}$ vektor.
A $\vec{d}$ merőleges az $\vec{e}$ vektorra.

3. Az ábrával ellentétben nem egy háromszöget, hanem egy konkáv négyszöget látunk.
1. megoldás:
A „nagy háromszög rövidebbik befogójával" szemközti csúcspontját origónak választva az átfogó két végpontjának (jelöljük A-val és B-vel) és a közbülső pontnak (jelöljük D-vel) a koordinátái: A(0, 0), D(8; 3), B(13; 5). Így $\overrightarrow{AD}(8;3)$, $\overrightarrow{DB}(5;2)$. A két vektor nem egyállású, tehát a három pont nem egy egyenesre illeszkedik.
2. megoldás:
A narancssárga derékszögű háromszög rövidebb befogójával szemközti szögének tangense $\frac{3}{8}$. A lila derékszögű háromszög rövidebb befogójával szemközti szögének tangense $\frac{2}{5}$. Így a két szög nem egyezhet meg.

4.
a) $P_a(-7;3)$; b) $P_b(7;-3)$; c) $P_c(7;3)$; d) $P_d(7;3)$; e) $P_{e_1}(-3;-7)$ és $P_{e_2}(3;7)$;
f) $P_f(-1;-7)$; g) $P_g(3;-3)$; h) $P_h(3; 5)$

5. 2.5. ábra
a) $(-\frac{5}{2};5)$; b) (2;8); c) $(-\frac{17}{2};\frac{7}{2})$



2.5. ábra

6.
a) (4;4), (–4;4), (–4;–4), (4;–4)
b) (2;2), (–2;–2)
c) $\left(3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right),\left(-3\sqrt{2};3\sqrt{2}\right),\left(-3\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right),\left(3\sqrt{2};-3\sqrt{2}\right)$
d) (3;3), (–3;–3)
e) Az $y=-x$ egyenes origótól különböző pontjai.
f) $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{5\sqrt{2}}{2};-\frac{5\sqrt{2}}{2}\right),\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2};\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

7. (3;5)

3. Helyvektorok

1. $\vec{d}=\vec{a}+\vec{c}-\vec{b}$
$\vec{k}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$

2.

a) $\vec{c} = -\vec{a},\ \vec{d} = -\vec{b}$

b) $\overrightarrow{k_{AB}} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{k_{BC}} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{k_{CD}} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{k_{AD}} = \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$

c) $\frac{1}{3}\vec{b}$

d) $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b}$

3. Az *ABC* háromszög súlypontja: (1; 2). Az oldalfelező pontok: $F_{AB}\left(5;\frac{5}{2}\right), F_{AC}\left(-\frac{7}{2};\frac{9}{2}\right), F_{BC}\left(\frac{3}{2};-1\right)$

A felezőpontok által alkotott háromszög súlypontja szintén: (1;2).
A két súlypont megegyezik.

4. $P'\left(-\frac{20}{3};\frac{38}{5}\right)$

5. *B* (6; –9)

6. A két súlypont megegyezik: $(\frac{1}{2};4)$

7. Bármely *ABCDEF* hatszög *AB*, *CD*, *EF* oldalainak felezőpontjai által alkotott háromszög súlypontja megegyezik a másik három oldal felezőpontjai által alkotott háromszög súlypontjával.
Legyen a hatszög hat csúcsa: $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, $D(x_4; y_4)$, $E(x_5; y_5)$, $F(x_6; y_6)$.
Ekkor az oldalak felezőpontjai:

$F_{AB}\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

$F_{BC}\left(\frac{x_2+x_3}{2};\frac{y_2+y_3}{2}\right)$

$F_{CD}\left(\frac{x_3+x_4}{2};\frac{y_3+y_4}{2}\right)$

$F_{DE}\left(\frac{x_4+x_5}{2};\frac{y_4+y_5}{2}\right)$

$F_{EF}\left(\frac{x_5+x_6}{2};\frac{y_5+y_6}{2}\right)$

$F_{FA}\left(\frac{x_6+x_1}{2};\frac{y_6+y_1}{2}\right)$

Az $F_{AB}F_{CD}F_{EF}$ háromszög súlypontja:

$$\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}+\frac{x_5+x_6}{2}}{3};\frac{\frac{y_1+y_2}{2}+\frac{y_3+y_4}{2}+\frac{y_5+y_6}{2}}{3}\right), \text{ azaz}$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6}\right)$$

Az $F_{BC}F_{DE}F_{FA}$ háromszög súlypontja:

$$\left(\frac{\frac{x_2+x_3}{2}+\frac{x_4+x_5}{2}+\frac{x_6+x_1}{2}}{3};\frac{\frac{y_2+y_3}{2}+\frac{y_4+y_5}{2}+\frac{y_6+y_1}{2}}{3}\right), \text{ azaz}$$

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6}{6};\frac{y_1+y_2+y_3+y_4+y_5+y_6}{6}\right)$$

4. Az egyenes normálvektoros egyenlete

1. Az egyenesre illeszkednek a következő pontok: A, D, E

2.

a) $5x + 2y = 24$
b) $2x - y = 7$
c) $3x + 2y = -19$

3. 4.3. ábra

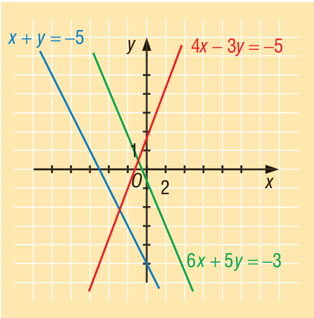
a) Az egyenes egy normálvektora: $\vec{n}(6;5)$.

Az egyenes pontjai közül három: $\left(0;-\frac{3}{5}\right)$, $\left(1;-\frac{9}{5}\right)$, $(2;-3)$.

b) Az egyenes egy normálvektora: $\vec{n}(4;-3)$.

Az egyenes pontjai közül három: $\left(0;\frac{5}{3}\right)$, $(1;3)$, $\left(2;\frac{13}{3}\right)$

c) Az egyenes egy normálvektora: $\vec{n}(1;1)$.
Az egyenes pontjai közül három: $(0;-5)$, $(1;-6)$, $(2;-7)$.



4.3. ábra

4. Ha az A-n megy át: $-x + y = -6$.
Ha a B-n megy át: $-x + y = 4$.

5. $x + 2y = 7$

6.

a) $y = -3$; $\vec{n}(0;1)$.

b) $x = 4$; $\vec{n}(1;0)$.

7. $\vec{n}(4;3); 4x+3y=0$

5. Az egyenes egyenlete más adatokból

1.

a) $3x+8y=2;\ \vec{n}(3;8)$

b) $-7x+2y=0;\ \vec{n}(-7;2)$

c) $5x+3y=36;\ \vec{n}(5;3)$

2.

a) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5};\ \alpha\approx 30,96°;\ \vec{v}(5;3)$

b) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{9};\ \alpha\approx -23,96°;\ \vec{v}(-9;4)$

c) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{13}{25};\ \alpha\approx 27,47°;\ \vec{v}\ (25;13)$

d) $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{4}{3};\ \alpha\approx -53,13°;\ \vec{v}\ (-3;4)$

3.

a) 68,2°; b) 0°;
c) 79,7°; d) –36,87°;
e) 31,61°; f) 65,56°;
g) –32,47°

4.

a) $-4x+y=-5$; b) $2x+y=13$;
c) $y=7$; d) $-4x+y=-51$;
e) $-4x+y=-5$; f) $-4x+y=0$

5.

a) (0;12) és (7;0)
b) (0;18) és (25;0)

Az $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ $(a,\ b\neq 0)$ egyenletű egyenes a koordináta tengelyeket a $(0;b)$ és az $(a;0)$ pontokban metszi. A kimetszett háromszög területe: $\frac{|a|\cdot|b|}{2}$, így az a) pontban keletkezett háromszög területe 42 t.e., a b) pontban keletkezett háromszög területe 225 t.e.

6. Egyenesek párhuzamosságának és merőlegességének feltétele, egyenesek metszéspontja

1. A *b* párhuzamos a *d*-vel és merőlegesek az *a*-ra.
A *c* párhuzamos az *e*-vel, és merőlegesek az *f*-re.

2. A párhuzamos: $2x+3y=0$,
a merőleges: $-3x+2y=0$.

3. $-\sqrt{3}x+y=-8\sqrt{3}+5$

a) $-\sqrt{3}x+y=8\sqrt{3}-5$

b) $x+\sqrt{3}y=-8-5\sqrt{3}$

4.

a) (–3;5); b) (7;1); c, (14;–8); d) $\left(\frac{93}{47};-\frac{34}{47}\right)$

5. $A(3;-1)$, $B(-2;3)$, $C(6;5)$

A háromszög nem derékszögű.

$K=\sqrt{68}+\sqrt{41}+\sqrt{45}=2\sqrt{17}+\sqrt{41}+3\sqrt{5}\approx 21{,}36$ egység

$T=21$ t.e.

6. $5x-8y=29$

7. Egyenesekkel kapcsolatos vegyes feladatok

1.

a) $M(3;\ 1)$; b) $M(4;\ 9)$

2.

a) $O\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{130}}{2}$; b) $O\left(1;\frac{5}{2}\right)$, $r=\frac{\sqrt{205}}{2}$

3. Az adott egyenes és az *AB* felezőmerőlegesének metszéspontja, vagyis a (7;–5) pont.

4. $\sqrt{240{,}1}\approx 15{,}5$

5. Két ilyen háromszög létezik.

Az első csúcspontjai: (–13; –2), (–9; –5) és (–6; –1).

A második csúcspontjai: (–13; –2), (–9; –5), (–12; –9).

A kerület és a terület a két esetben megegyezik. $K=10+5\sqrt{2}$ egység, $T=12{,}5$ t.e.

6. $\frac{1963}{169}\approx 11{,}62$

7. A négy csúcspont: $A(-2;\ 0)$, $B(4;\ -2)$, $C(4;\ 2)$, $D(1;\ 3)$

Kerülete: $3\sqrt{10}+3\sqrt{2}+4\approx 17{,}73$ egység

Területe: 18 t.e.

8. A kör egyenlete

1.

a) $(x-2)^2+(y-7)^2=9$

az x tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (–1;7), (5;7)
az y tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (2;10), (2;4)
egy belső pontja: (1;8)
egy külső pontja: (–2011;–2011)

b) $(x+13)^2+(y-4)^2=64$

az x tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (–5;4), (–21;4)
az y tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (–13;12), (–13;–4)
egy belső pontja: (–13;5)
egy külső pontja: (–2011;–2011)

c) $x^2+(y+5)^2=100$

az x tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (10;–5), (–10;–5)
az y tengellyel párhuzamos átmérőjének két végpontja: (0;5), (0;–15)
egy belső pontja: (0;–4)
egy külső pontja: (2011;–2011)

2.

a) Körnek az egyenlete. A kör középpontja: (12;–9), sugara: 11.
b) Körnek az egyenlete. A kör középpontja: (–10;0), sugara: 8.
c) Körnek az egyenlete. A kör középpontja: (–3;7), sugara: 2.
d) Körnek az egyenlete. A kör középpontja: (8;8), sugara: 14.
e) Nem körnek az egyenlete.

3.

a) $(x+3)^2+(y-2)^2=64$
b) $(x-9)^2+y^2=136$
c) $(x-4)^2+(y-2)^2=45$
d) Két ilyen kör is van: $(x-5)^2+(y-2)^2=16$, illetve $(x+3)^2+(y-2)^2=16$
e) Két ilyen kör is van: $(x-5)^2+(y-5)^2=25$ és $(x-29)^2+(y-29)^2=841$

4.

a) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-5)^2=\frac{221}{4}$

b) $(x-1)^2+(y-1)^2=13$

c) $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{74}{4}$

d) $(x-3)^2+(y-2)^2=50$

5. Ha $x=0$, akkor a levágott húr hossza: $6\sqrt{7}$.
Ha $x=-3$, akkor a levágott húr hossza: $12\sqrt{3}$.
Ha $x=-9$, akkor a levágott húr hossza: 24.
Ha $x=-11$, akkor a levágott húr hossza: $4\sqrt{35}$.
Ha $x=3$, akkor a levágott húr hossza: 0.
Ha $x=5$, akkor nincs levágott húr.

9. A körök és egyenesek kölcsönös helyzete

1.
a) (2;0) és (–3;5)
b) (13;3) és (1;–1)

2. A körvonal és az adott egyenesre merőleges, a kör középpontján áthaladó egyenes metszéspontjai közül az egyik pont: (2;1)

3. $3x - 5y = 13$ és $3x - 5y = -55$

4.
a) $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 81$
b) $(x-9)^2 + (y-4)^2 = 16$
c) $(x-9)^2 + (y-4)^2 = \frac{169}{37}$

5. Metszéspontok: (–1;3) és (3;5).
A közös húron átmenő egyenes egyenlete: $x - 2y = -7$.

6. $x + 2y = -3$ és $x + 2y = -27$

7. A két érintő egyenlete: $x + y = 3$ és $-x + 7y = -67$.
A két érintő által bezárt szög: 53,13°.

10. A parabola (Kiegészítő, emelt szintű tananyag)

1. $p = 16$
A vezéregyenes egyenlete: $y = -10$

$$y = \frac{1}{32}(x+5)^2 - 2$$

2. A húr hossza: $3\sqrt{2}$

1. Események, műveletek események között

1.

a) A = {FFF, FFI, FIF, IFF}

$\overline{A}$: Egy érmét egymás után háromszor feldobunk, és a dobások között legfeljebb egy fej lesz.

$\overline{A}$= {FII, IFI, IIF, III}

b) $B = \{2, 3, 5\}$

$\overline{B}$: A szabályos dobókockával 1-et vagy összetett számot dobunk.

$\overline{B} = \{1, 4, 6\}$

c) $C = \{123, 213, 312, 321\}$

$\overline{C}$: Az 1, 2, 3 számok véletlen sorrendje esetén az 1 és a 2 nem kerülnek egymás mellé.

$\overline{C} = \{132, 231\}$

d) $D = \{1, 2\}$

$\overline{D}$: Egy szabályos dobókockával legalább 3-ast dobunk.

$\overline{D} = \{3, 4, 5, 6\}$

e) $E = \{1\}$

$\overline{E}$: Egy szabályos dobókockával nem köbszámot dobunk.

$\overline{E} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

2.

a) $A + B = \{12, 14, 15, 16, 21, 22, 24, 26, 32, 33, 34, 36, 42, 44, 45, 46, 51, 52, 54, 56, 62, 63, 64, 66\}$

b) $A \cdot B = \{12, 24, 36, 42, 54, 66\}$

c) $A - B = \{15, 21, 33, 45, 51, 63\}$

d) $\overline{A} = \{11, 13, 14, 16, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 34, 35, 41, 43, 44, 46, 52, 53, 55, 56, 61, 62, 64, 65\}$

e) $\overline{A+B} = \{11, 13, 23, 25, 31, 35, 41, 43, 53, 55, 61, 65\}$

f) $\overline{A \cdot B} = \{11, 13, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 25, 26, 31, 32, 33, 34, 35, 41, 43, 44, 45, 46, 51, 52, 53, 55, 56, 61, 62, 63, 64, 65\}$

3. Jelöljük a lapokat a következőképpen: M (makk), Z (zöld), T (tök), P (piros) VII, VIII, IX, X, A (alsó), F (felső), K (király), Á (ász)

a) piros vagy zöld figurát húzunk: {PA, PF, PK, PÁ, ZA, ZF, ZK, ZÁ}

b) pirosat, vagy zöld figurát: {PVII, PVIII, PIX, PX, PA, PF, PK, PÁ, ZA, ZF, ZK, ZÁ}

c) figurát húzunk: {MA, MF, MK, MÁ, ZA, ZF, ZK, ZÁ, TA, TF, TK, TÁ, PA, PF, PK, PÁ}

d) piros figurát húzunk: {PA, PF, PK, PÁ}

e) lehetetlen esemény

f) makk vagy tök figurát húzunk: {MA, MF, MK, MÁ, TA, TF, TK, TÁ}

g) figurát húzunk: {MA, MF, MK, MÁ, ZA, ZF, ZK, ZÁ, TA, TF, TK, TÁ, PA, PF, PK, PÁ}

2. Klasszikus valószínűségi modell, visszatevéses mintavétel

1.

a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{6}$; c) $\frac{1}{4}$; d) $\frac{\binom{6}{5}\cdot 5!}{6^5}=\frac{5}{54}$; e) $\frac{49}{54}$; f) $\frac{6^5-5^5}{6^5}\approx 0,5981$

2. $\frac{2}{5}$

3.

a) $\frac{\binom{8}{3}}{\binom{32}{3}}\approx 0,0113$; b) $\frac{\binom{4}{3}}{\binom{32}{3}}\approx 0,0008$; c) $\frac{\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{3}}\approx 0,0452$;

d) $\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{32}{3}}\approx 0,0048$; e) $\frac{\binom{32}{3}-\binom{28}{3}}{\binom{32}{3}}\approx 0,3395.$

4.

a) $\frac{\binom{15}{3}-\binom{12}{3}}{\binom{15}{3}}\approx 0,5165$; b) $\frac{\binom{3}{1}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{15}{3}}\approx 0,4352$; c) $\frac{\binom{3}{3}}{\binom{15}{3}}\approx 0,0022$

5.

a) $\frac{6^5-5^5}{6^5}\approx 0,5981$; b) $\frac{6^5-5^5}{6^5}\approx 0,5981$; c) $\frac{6^5-4^5}{6^5}\approx 0,8683$;

d) $\frac{6^5-5^5}{6^5}+\frac{6^5-5^5}{6^5}-\frac{6^5-4^5}{6^5}\approx 0,3279$

6. A 7-esnek nagyobb a valószínűsége.

7.

a) $\frac{1}{4}$

b) $\frac{\binom{6}{2}\cdot 3^2\cdot 3^4}{6^6}=0,234375$

c) $$\frac{6^6 - \binom{6}{0} \cdot 3^0 \cdot 3^6 - \binom{6}{1} \cdot 3^1 \cdot 3^5}{6^6} = 0{,}890625$$

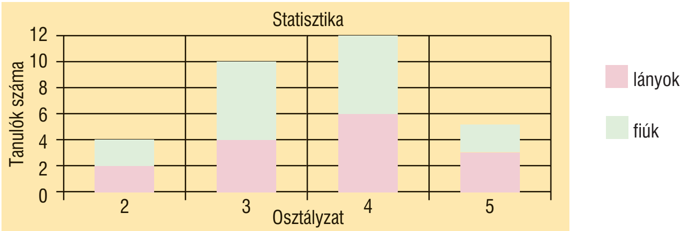
3. A szóródás mutatói

1. Első: 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6
Terjedelme: 0
Átlagos abszolút eltérése: 0
Szórása: 0
Relatív szórása: 0
Második: 4, 6, 6, 6, 6, 6, 8
Terjedelme: 4
Átlagos abszolút eltérése: $\frac{4}{7}$
Szórásnégyzete: $\frac{8}{7}$
Szórása: $\sqrt{\frac{8}{7}} \approx 1{,}07$
Relatív szórása: 0,1782

2.
a) Az átlag, a módusz és a medián 6-tal nő. A terjedelem, az átlagos abszolút eltérés és a szórás nem változik.
b) Az átlag, a módusz, a medián, a terjedelem, az átlagos abszolút eltérés és a szórás 28-szorosára változik.

3. 3.3. ábra

	lányok	Fiúk
Módusz	4	3
Medián	4	3
Átlag	$\frac{11}{3}$	$\frac{52}{15}$
Terjedelem	3	3
Szórásnégyzet	$\frac{8}{9}$	$\frac{176}{225}$
Szórás	0,9428	0,8844
Átlagos abszolút eltérés	$\frac{4}{5}$	$\frac{172}{225}$



3.3. ábra oszlopdiagram